Matrices et Opérateurs de Toeplitz

Edgar Tchoundja

Université de Yaoundé I

Ecole de Recherche CIMPA:
"Analyse et Probabilités"

Université Felix Houphouët-Boigny, 17 - 28 Mars 2014

Plan

Définition de Matrices de Toeplitz

Definition

Ce sont les matrices de la forme:

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots & \cdots & a_{-(n-1)} & a_{-n} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots & \ddots & a_{-(n-2)} & a_{-(n-1)} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & \ddots & a_{-(n-3)} & a_{-(n-2)} & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & \ddots & a_{-(n-4)} & a_{-(n-3)} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \ddots & \ddots & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ddots & \ddots & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Otto Toeplitz (1881 - 1940)

Toeplitz étudia ces matrices en 1911.

Intérêts des matrices de Toeplitz

Une matrice de Toeplitz est déterminée par la donnée d'une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Une matrice de Toeplitz T est donc donnée par:

$$T = \left(T_{i,j} = a_{i-j}\right)_{i,j\in\mathbb{N}^*}. \tag{1}$$

La tronquée d'ordre n est:

$$T_n = \left(a_{i-j}\right)_{1\leq i,j\leq n}. \tag{2}$$

Ces matrices interviennent dans:

- Théorie de la prédiction

Intérêts des matrices de Toeplitz

Une matrice de Toeplitz est déterminée par la donnée d'une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Une matrice de Toeplitz T est donc donnée par:

$$T = \left(T_{i,j} = a_{i-j}\right)_{i,j\in\mathbb{N}^*}. \tag{1}$$

La tronquée d'ordre n est:

$$T_n = \left(a_{i-j}\right)_{1\leq i,j\leq n}. \tag{2}$$

Ces matrices interviennent dans:

- Théorie de la prédiction
- Solutions numériques de certaines équations différentielles

Intérêts des matrices de Toeplitz

Une matrice de Toeplitz est déterminée par la donnée d'une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Une matrice de Toeplitz T est donc donnée par:

$$T = \left(T_{i,j} = a_{i-j}\right)_{i,j\in\mathbb{N}^*}. \tag{1}$$

La tronquée d'ordre n est:

$$T_n = \left(a_{i-j}\right)_{1\leq i,j\leq n}. \tag{2}$$

Ces matrices interviennent dans:

- Théorie de la prédiction
- Solutions numériques de certaines équations différentielles
- Traitement du signal et de l'image

Intérêts des matrices de Toeplitz

Une matrice de Toeplitz est déterminée par la donnée d'une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Une matrice de Toeplitz T est donc donnée par:

$$T = \left(T_{i,j} = a_{i-j}\right)_{i,j\in\mathbb{N}^*}. \qquad (1)$$

La tronquée d'ordre n est:

$$T_n = \left(a_{i-j}\right)_{1\leq i,j\leq n}. \qquad (2)$$

Ces matrices interviennent dans:

- Théorie de la prédiction
- Solutions numériques de certaines équations différentielles
- Traitement du signal et de l'image
- **Etude des processus gaussiens stationnaires.**

Intérêts des matrices de Toeplitz

Une matrice de Toeplitz est déterminée par la donnée d'une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Une matrice de Toeplitz T est donc donnée par:

$$T = \left(T_{i,j} = a_{i-j}\right)_{i,j\in\mathbb{N}^*}. \tag{1}$$

La tronquée d'ordre n est:

$$T_n = \left(a_{i-j}\right)_{1\leq i,j\leq n}. \tag{2}$$

Ces matrices interviennent dans:

- Théorie de la prédiction
- Solutions numériques de certaines équations différentielles
- Traitement du signal et de l'image
- **Etude des processus gaussiens stationnaires.**
- ...

Structures algébriques matrices de Toeplitz

- L'ensemble des matrices de Toeplitz est un espace vectoriel

Structures algébriques matrices de Toeplitz

- L'ensemble des matrices de Toeplitz est un espace vectoriel
- Le produit de deux matrices de Toeplitz n'est pas nécessairement de Toeplitz

Structures algébriques matrices de Toeplitz

- L'ensemble des matrices de Toeplitz est un espace vectoriel
- Le produit de deux matrices de Toeplitz n'est pas nécessairement de Toeplitz
- Si T est inversible, l'inverse n'est pas nécessairement de Toeplitz.

Structures algébriques matrices de Toeplitz

- L'ensemble des matrices de Toeplitz est un espace vectoriel
- Le produit de deux matrices de Toeplitz n'est pas nécessairement de Toeplitz
- Si T est inversible, l'inverse n'est pas nécessairement de Toeplitz.

Questions sur la matrice tronquée T_n?

Structures algébriques matrices de Toeplitz

- L'ensemble des matrices de Toeplitz est un espace vectoriel
- Le produit de deux matrices de Toeplitz n'est pas nécessairement de Toeplitz
- Si T est inversible, l'inverse n'est pas nécessairement de Toeplitz.

Questions sur la matrice tronquée T_n?

- Résoudre $T_n X = Y$ (Algorithmes efficaces, rapides et peu coûteux?)

Structures algébriques matrices de Toeplitz

- L'ensemble des matrices de Toeplitz est un espace vectoriel
- Le produit de deux matrices de Toeplitz n'est pas nécessairement de Toeplitz
- Si T est inversible, l'inverse n'est pas nécessairement de Toeplitz.

Questions sur la matrice tronquée T_n?

- Résoudre $T_n X = Y$ (Algorithmes efficaces, rapides et peu coûteux?)
- Critères d'inversibilité?

Structures algébriques matrices de Toeplitz

- L'ensemble des matrices de Toeplitz est un espace vectoriel
- Le produit de deux matrices de Toeplitz n'est pas nécessairement de Toeplitz
- Si T est inversible, l'inverse n'est pas nécessairement de Toeplitz.

Questions sur la matrice tronquée T_n?

- Résoudre $T_n X = Y$ (Algorithmes efficaces, rapides et peu coûteux?)
- Critères d'inversibilité?
- Déterminer les valeurs propres ?

Structures algébriques matrices de Toeplitz

- L'ensemble des matrices de Toeplitz est un espace vectoriel
- Le produit de deux matrices de Toeplitz n'est pas nécessairement de Toeplitz
- Si T est inversible, l'inverse n'est pas nécessairement de Toeplitz.

Questions sur la matrice tronquée T_n?

- Résoudre $T_nX = Y$ (Algorithmes efficaces, rapides et peu coûteux?)
- Critères d'inversibilité?
- Déterminer les valeurs propres ?
- Comportement asympotique?

Matrices circulantes

Ce sont les matrices de Toeplitz dans laquelle on passe d'une ligne à la suivante par permutation circulaire (décalage vers la droite) des coefficients.

$$C = C_n = \begin{pmatrix} c_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & & c_3 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$$

On note simplement par:

$$C_n = (c_0, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}). \tag{3}$$

Diagonalisation de C

On pose:

$$U = U_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (e_2 \; e_3 \; \cdots \; e_{n-1} \; e_1),$$

où $e_k = k$-ième colonne de la matrice identité I_n.

Lemma

Soit $C_n = (c_0, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1})$ une matrice circulante. On a $C_n = c_0 I_n + c_1 U_n + \cdots + c_{n-1} U_n^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k U_n^k$.

Diagonalisation de C

Theorem

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $C = (c_0, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1})$ une matrice circulante. Elle est diagonalisée par la matrice de transformation de Fourier discrète. Précisement, on a

$$C =^t \overline{F_n} D F_n,$$

où la matrice diagonale $D = Diag(\sqrt{n} F_n\, c)$ avec c la matrice colonne donnée par la première colonne de C et

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_n & w_n^2 & & w_n^{n-1} \\ 1 & w_n^2 & w_n^4 & & w_n^{2(n-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & w_n^{(n-1)} & w_n^{2(n-1)} & \cdots & w_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix},$$

avec $w_n = e^{\frac{-2\pi i}{n}}$.

Comportement Asymptotique

Theorem (Szegö)

Soit T une matrice de Toeplitz Hermitienne. Soit (T_n) la suite des tronquées d'ordre n de T. Soit f la fonction densité spectrale de T. On suppose que F est une fonction continue sur l'image de f. On pose $(\lambda_{n,k})$ les valeurs propres associées à T_n. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(\lambda_{n,k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(f(x))dx.$$

Matrices de Toeplitz comme Opérateurs dans $l^2(\mathbb{N})$

.

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ u = (u_n) \subset \mathbb{C} : \quad \sum_{k=0}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \right\}.$$

Soit T une matrice de Toeplitz donnée par la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Pour les estimations, T peut être considérée comme un opérateur sur $l^2(\mathbb{N})$ défini par:

$$\begin{array}{llll} T : & l^2(\mathbb{N}) & \to & l^2(\mathbb{N}) \\ & u & \mapsto & v = Tu = \left(v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n-k} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}} . \end{array}$$

Questions sur T?

.

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ u = (u_n) \subset \mathbb{C} : \quad \sum_{k=0}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \right\}.$$

Soit T une matrice de Toeplitz donnée par la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Pour les estimations, T peut être considérée comme un opérateur sur $l^2(\mathbb{N})$ défini par:

$$\begin{array}{cccc} T: & l^2(\mathbb{N}) & \to & l^2(\mathbb{N}) \\ & u & \mapsto & v = Tu = \left(v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n-k} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}} . \end{array}$$

Questions sur T?

- Etudes des propriétés spectrales (Continuité, compacité, trace, Hilbert Schmidt)

.

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ u = (u_n) \subset \mathbb{C} : \quad \sum_{k=0}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \right\}.$$

Soit T une matrice de Toeplitz donnée par la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Pour les estimations, T peut être considérée comme un opérateur sur $l^2(\mathbb{N})$ défini par:

$$\begin{array}{rccc} T: & l^2(\mathbb{N}) & \to & l^2(\mathbb{N}) \\ & u & \mapsto & v = Tu = \left(v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n-k} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

Questions sur T?

- Etudes des propriétés spectrales (Continuité, compacité, trace, Hilbert Schmidt)
- Propriétés algébriques: rang fini, inversibilité, produit d'opérateurs, spectre et spectre essentiel,...

Espaces de Hardy

- $\mathbb{D} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : \ |\mathbf{z}| < \mathbf{1}\}$: Disque unité de $\mathbb{C}$; $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.

Espaces de Hardy

- $\mathbb{D} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : \ |\mathbf{z}| < \mathbf{1}\}$: Disque unité de $\mathbb{C}$; $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.
- Soit $p \in (0, \infty)$, $H^p(\mathbb{D})$ Espace de Hardy.

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}); \quad ||f||_{H^p}^p := \sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty \right\}.$$

Espaces de Hardy

- $\mathbb{D} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : \ |\mathbf{z}| < \mathbf{1}\}$: Disque unité de $\mathbb{C}$; $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.
- Soit $p \in (0, \infty)$, $H^p(\mathbb{D})$ Espace de Hardy.

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}); \quad ||f||^p_{H^p} := \sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty \right\}.$$

- Soit $f \in H^p(\mathbb{D})$, alors

$$f^*(\theta) = \lim_{\substack{r \to 1 \\ <}} f(re^{i\theta}) \qquad \text{existe p.p}$$

.

Espaces de Hardy

- $\mathbb{D} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : \ |\mathbf{z}| < \mathbf{1}\}$: Disque unité de $\mathbb{C}$; $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.
- Soit $p \in (0, \infty)$, $H^p(\mathbb{D})$ Espace de Hardy.

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}); \quad ||f||_{H^p}^p := \sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty \right\}.$$

- Soit $f \in H^p(\mathbb{D})$, alors

$$f^*(\theta) = \lim_{\substack{r \to 1 \\ <}} f(re^{i\theta}) \qquad \text{existe p.p}$$

.

- La fonction $f^* \in L^p(T, d\theta)$ et on a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(\theta)|^p d\theta = ||f||_{H^p}^p$.

Espaces de Hardy

- $\mathbb{D} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : \ |\mathbf{z}| < \mathbf{1}\}$: Disque unité de $\mathbb{C}$; $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.
- Soit $p \in (0, \infty)$, $H^p(\mathbb{D})$ Espace de Hardy.

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}); \quad ||f||^p_{H^p} := \sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty \right\}.$$

- Soit $f \in H^p(\mathbb{D})$, alors

$$f^*(\theta) = \lim_{\substack{r \to 1 \\ <}} f(re^{i\theta}) \qquad \text{existe p.p}$$

.

- La fonction $f^* \in L^p(T, d\theta)$ et on a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(\theta)|^p d\theta = ||f||^p_{H^p}$.
- On a $H^p(\mathbb{D}) \hookrightarrow L^p(T)$.

Espaces de Hardy

- $\mathbb{D} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : \ |\mathbf{z}| < \mathbf{1}\}$: Disque unité de $\mathbb{C}$; $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.
- Soit $p \in (0, \infty)$, $H^p(\mathbb{D})$ Espace de Hardy.

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}); \quad ||f||_{H^p}^p := \sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty \right\}.$$

- Soit $f \in H^p(\mathbb{D})$, alors

$$f^*(\theta) = \lim_{\substack{r \to 1 \\ <}} f(re^{i\theta}) \qquad \text{existe p.p}$$

.

- La fonction $f^* \in L^p(T, d\theta)$ et on a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(\theta)|^p d\theta = ||f||_{H^p}^p$.
- On a $H^p(\mathbb{D}) \hookrightarrow L^p(T)$.
- $p = 2$: Espace de Hilbert: $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)} d\theta$.

Espaces de Hardy

- $\mathbb{D} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : \ |\mathbf{z}| < \mathbf{1}\}$: Disque unité de $\mathbb{C}$; $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.
- Soit $p \in (0, \infty)$, $H^p(\mathbb{D})$ Espace de Hardy.

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}); \quad ||f||^p_{H^p} := \sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty \right\}.$$

- Soit $f \in H^p(\mathbb{D})$, alors

$$f^*(\theta) = \lim_{\substack{r \to 1 \\ <}} f(re^{i\theta}) \qquad \text{existe p.p}$$

.

- La fonction $f^* \in L^p(T, d\theta)$ et on a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(\theta)|^p d\theta = ||f||^p_{H^p}$.
- On a $H^p(\mathbb{D}) \hookrightarrow L^p(T)$.
- $p = 2$: Espace de Hilbert: $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)} d\theta$.
- $P : L^2(T) \to H^2(\mathbb{D})$ **Projecteur de Szegö.**

Espaces de Hardy

- $\mathbb{D} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : \ |\mathbf{z}| < \mathbf{1}\}$: Disque unité de $\mathbb{C}$; $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.
- Soit $p \in (0, \infty)$, $H^p(\mathbb{D})$ Espace de Hardy.

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}); \quad ||f||^p_{H^p} := \sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty \right\}.$$

- Soit $f \in H^p(\mathbb{D})$, alors

$$f^*(\theta) = \lim_{\substack{r \to 1 \\ <}} f(re^{i\theta}) \qquad \text{existe p.p}$$

.

- La fonction $f^* \in L^p(T, d\theta)$ et on a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(\theta)|^p d\theta = ||f||^p_{H^p}$.
- On a $H^p(\mathbb{D}) \hookrightarrow L^p(T)$.
- $p = 2$: Espace de Hilbert: $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)} d\theta$.
- $P : L^2(T) \to H^2(\mathbb{D})$ **Projecteur de Szegö.**
- Ce projecteur est donné par

$$P(f)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{1 - z\, e^{-i\theta}} d\theta.$$

Relation Matrice et Opérateur de Toeplitz

Proposition

Soit T une matrice de Toeplitz définie par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On pose $\varphi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{+\infty} a_n\, e^{in\theta}$ Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \underset{x=(x_n)_{n\geq 0}}{l^2(\mathbb{N})} & \xrightarrow{T} & \underset{y=Tx=(y_n)_{n\geq 0}}{l^2(\mathbb{N})} \\ i\downarrow & & i\downarrow \\ \underset{f(z)=\sum_{n\geq 0}^{+\infty} x_n\, z^n}{H^2(\mathbb{D})} & \xrightarrow{T_\varphi} & \underset{F(z)=\sum_{n\geq 0}^{+\infty} y_n\, z^n}{H^2(\mathbb{D})} \end{array},$$

où: $T_\varphi f(z) = P(\varphi\, f)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\theta) f(\theta)}{1-z\, e^{-i\theta}} d\theta.$

Cette proposition permet de traduire les estimations avec la matrice de Toeplitz en des estimations sur les opérateurs de Toeplitz.

L'opérateur T_φ est appelé opérateur de Toeplitz et la fonction φ est appelée symbole de l'opérateur de Toeplitz.

Questions sur T_φ?

Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur le symbole φ pour les questions suivantes:

Questions sur T_φ?

Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur le symbole φ pour les questions suivantes:

- Etudes des propriétés spectrales (Continuité, compacité, trace, Hilbert Schmidt)

Opérateurs de Toeplitz

Questions sur T_φ?

Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur le symbole φ pour les questions suivantes:

- Etudes des propriétés spectrales (Continuité, compacité, trace, Hilbert Schmidt)
- Propriétés algébriques: rang fini, inversibilité, produit d'opérateurs, spectre et spectre essentiel,...

Theorem (Brown-Halmos, 64')

Soit $\varphi \in L^2(T)$.

Propriétés spectrales

Theorem (Brown-Halmos, 64')

Soit $\varphi \in L^2(T)$.

- T_φ *est borné sur* $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si* φ *est borné. De plus,*

$$||T_\varphi|| = ||\varphi||_\infty.$$

Propriétés spectrales

Theorem (Brown-Halmos, 64')

Soit $\varphi \in L^2(T)$.

- T_φ *est borné sur* $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si* φ *est borné. De plus,*

$$||T_\varphi|| = ||\varphi||_\infty.$$

- T_φ *est compact sur* $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si* $\varphi \equiv 0$.

Propriétés spectrales

Theorem (Brown-Halmos, 64')

Soit $\varphi \in L^2(T)$.

- T_φ *est borné sur* $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si* φ *est borné. De plus,*

$$||T_\varphi|| = ||\varphi||_\infty.$$

- T_φ *est compact sur* $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si* $\varphi \equiv 0$.

Proposition

Soit $f, g \in L^\infty(T)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On a*

Si $f \in H^\infty$, *alors*

Propriétés spectrales

Theorem (Brown-Halmos, 64')

Soit $\varphi \in L^2(T)$.

- T_φ *est borné sur* $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si* φ *est borné. De plus,*

$$||T_\varphi|| = ||\varphi||_\infty.$$

- T_φ *est compact sur* $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si* $\varphi \equiv 0$.

Proposition

Soit $f, g \in L^\infty(T)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On a*

- $T_{f+\lambda g} = T_f + \lambda T_g$

Si $f \in H^\infty$, *alors*

Propriétés spectrales

Theorem (Brown-Halmos, 64')

Soit $\varphi \in L^2(T)$.

- T_φ *est borné sur* $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si* φ *est borné. De plus,*

$$||T_\varphi|| = ||\varphi||_\infty.$$

- T_φ *est compact sur* $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si* $\varphi \equiv 0$.

Proposition

Soit $f, g \in L^\infty(T)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On a*

- $T_{f+\lambda g} = T_f + \lambda T_g$
- $(T_f)^* = T_{\overline{f}}$.

Si $f \in H^\infty$, *alors*

Propriétés spectrales

Theorem (Brown-Halmos, 64')

Soit $\varphi \in L^2(T)$.

- T_φ *est borné sur* $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si* φ *est borné. De plus,*

$$||T_\varphi|| = ||\varphi||_\infty.$$

- T_φ *est compact sur* $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si* $\varphi \equiv 0$.

Proposition

Soit $f, g \in L^\infty(T)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On a*

- $T_{f+\lambda g} = T_f + \lambda T_g$
- $(T_f)^* = T_{\overline{f}}$.

Si $f \in H^\infty$*, alors*

- $T_g T_f = T_{fg}$

Propriétés spectrales

Theorem (Brown-Halmos, 64')

Soit $\varphi \in L^2(T)$.

- T_φ *est borné sur* $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si* φ *est borné. De plus,*

$$||T_\varphi|| = ||\varphi||_\infty.$$

- T_φ *est compact sur* $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si* $\varphi \equiv 0$.

Proposition

Soit $f, g \in L^\infty(T)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On a*

- $T_{f+\lambda g} = T_f + \lambda T_g$
- $(T_f)^* = T_{\bar{f}}$.

Si $f \in H^\infty$, *alors*

- $T_g T_f = T_{fg}$
- $T_g T_{\bar{f}} = T_{\bar{f}g}$.

Généralisations

L'étude des opérateurs de Toeplitz s'est étendue dans plusieurs directions:

- Les espaces de Bergman (à poids):

$$A^p_\beta(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}); \quad ||f||^p_{p,\beta} := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|^2)^\beta d\nu(z) < \infty \right\}.$$

$$T^\beta_\varphi(f)(z) = c_\beta \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-\langle z,w\rangle)^{2+\beta}} f(w)\varphi(w) d\nu(w).$$

Généralisations

L'étude des opérateurs de Toeplitz s'est étendue dans plusieurs directions:

- Les espaces de Bergman (à poids):

$$A^p_\beta(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}); \quad ||f||^p_{p,\beta} := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1-|z|^2)^\beta d\nu(z) < \infty \right\}.$$

$$T^\beta_\varphi(f)(z) = c_\beta \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-\langle z,w\rangle)^{2+\beta}} f(w)\varphi(w)d\nu(w).$$

- Les espaces de Fock, les espaces de Dirichlet et de Besov etc.

L'étude des opérateurs de Toeplitz s'est étendue dans plusieurs directions:

- Les espaces de Bergman (à poids):

$$A^p_\beta(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}); \quad ||f||^p_{p,\beta} := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1-|z|^2)^\beta d\nu(z) < \infty \right\}.$$

$$T^\beta_\varphi(f)(z) = c_\beta \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-\langle z,w\rangle)^{2+\beta}} f(w)\varphi(w)d\nu(w).$$

- Les espaces de Fock, les espaces de Dirichlet et de Besov etc.
- Dans d'autres domaines de $\mathbb{C}$ et en dimension supérieure (la boule unité, les domaines symétriques etc.)

Généralisations

L'étude des opérateurs de Toeplitz s'est étendue dans plusieurs directions:

- Les espaces de Bergman (à poids):

$$A^p_\beta(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}); \quad ||f||^p_{p,\beta} := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1-|z|^2)^\beta d\nu(z) < \infty \right\}.$$

$$T^\beta_\varphi(f)(z) = c_\beta \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-\langle z,w\rangle)^{2+\beta}} f(w)\varphi(w)d\nu(w).$$

- Les espaces de Fock, les espaces de Dirichlet et de Besov etc.
- Dans d'autres domaines de $\mathbb{C}$ et en dimension supérieure (la boule unité, les domaines symétriques etc.)
- Aux symboles qui sont des mesures.

Généralisations

L'étude des opérateurs de Toeplitz s'est étendue dans plusieurs directions:

- Les espaces de Bergman (à poids):

$$A^p_\beta(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}); \quad ||f||^p_{p,\beta} := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|^2)^\beta d\nu(z) < \infty \right\}.$$

$$T^\beta_\varphi(f)(z) = c_\beta \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-\langle z,w\rangle)^{2+\beta}} f(w)\varphi(w)d\nu(w).$$

- Les espaces de Fock, les espaces de Dirichlet et de Besov etc.
- Dans d'autres domaines de $\mathbb{C}$ et en dimension supérieure (la boule unité, les domaines symétriques etc.)
- Aux symboles qui sont des mesures.
- ....