Cours d'Analyse Harmonique Classique
Inégalités en norme sur l'intégrale fractionnaire

Ibrahim FOFANA

13 mars 2014

Chapitre 1

Introduction

1.1 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

d est un entier strictement positif fixé pour toute la suite.
$\mathbb{R}^d$ est muni sa structure uselle d'espace de Hilbert réel et de sa mesure de Lebesgue.
Nous posons, pour tous éléments $x = (x_1,\ x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1,\ y_2, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^d$

$$x.y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \quad \text{et} \quad |x| = (x.x)^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ (indéfiniment différentiables) de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$.
Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ nous posons
• $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ ...\ + \alpha_d$
• $\forall x \in \mathbb{R}^d \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_d^{\alpha_d}$
• $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{C}) \quad \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(\varphi) = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dfrac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} ... \dfrac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} \varphi.$
• L'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions test de Schwartz est défini par

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{C})\ :\ \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^d\ \ p_{\alpha,\,\beta}(\varphi) < +\infty\}$$

où

$$p_{\alpha,\,\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \varphi(x) \right|. \tag{I.1.1}$$

Il est clair que muni des opérations usuelles sur les fonctions complexes (addition, multiplication par les scalaires et multiplication définies point par point) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre sur $\mathbb{C}$.

La transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$ (notée aussi $\widehat{\varphi}$) d'un élément φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-ix.\xi} dx. \tag{I.1.2}$$

Exemple 1.1.1. *La fonction gaussienne $x \mapsto G(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ appartient clairement à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Un calcul élémentaire montre que $\mathcal{F}(G) = G$.*

Rappelons que la transformée de Fourier possède les propriétés énoncées ci-dessous.

Proposition 1.1.2. *1) Pour tout élément $(\alpha,\ \varphi)$ de $\mathbb{N}^d \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $x \longmapsto \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(\varphi)(x)$ et $x \longmapsto M_\alpha(\varphi)(x) = (ix)^\alpha \varphi(x)$ appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et en tout point ξ de $\mathbb{R}^d$*

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(\varphi)\right](\xi) = M_\alpha[\mathcal{F}(\varphi)](\xi) \tag{I.1.4}$$

$$\mathcal{F}[M_\alpha(\varphi)](\xi) = (-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}[\mathcal{F}(\varphi)](\xi) \tag{I.1.5}$$

2) $\mathcal{F}$ est un endomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 1.1.3. *Considérons deux éléments φ et ψ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Nous avons*

$$\begin{aligned}
\forall\xi\in\mathbb{R}^d\quad \mathcal{F}(\varphi)(\xi)\mathcal{F}(\psi)(\xi) &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)e^{-iy.\xi}dy\int_{\mathbb{R}^d}\psi(z)e^{-iz.\xi}dz\\
&= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)e^{-iy.\xi}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\psi(z)e^{-iz.\xi}dz\right]dy\\
&= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)e^{-iy.\xi}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\psi(z)e^{-i(z+y).\xi}e^{iy.\xi}dz\right]dy\\
&= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)\left[\int_{\mathbb{R}^d}\psi(x-y)e^{-ix.\xi}dx\right]dy.
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, nous arrivons à

$$\forall\xi\in\mathbb{R}^d\quad \mathcal{F}(\varphi)(\xi)\mathcal{F}(\psi)(\xi) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)\psi(x-y)dy\right]e^{-ix.\xi}dx.$$

Cela nous amène à introduire la notion suivante.

Définition 1.1.4. *Considérons deux fonctions f et g intégrables sur $\mathbb{R}^d$. Le produit de convolution $f*g$ de f par g est défini par*

$$\forall x\in\mathbb{R}^d\quad f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d}f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)dy.$$

Rappellons le résultat suivant.

Proposition 1.1.5. *1) Pour tous éléments φ et ψ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi*\psi$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\mathcal{F}(\varphi*\psi) = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(\psi). \tag{I.1.6}$$

2) $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dont la réciproque est la cotransformation de Fourier $\overline{\mathcal{F}}$ définie par

$$\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\;\;\forall\xi\in\mathbb{R}^d,\quad \overline{\mathcal{F}}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(\varphi)(-\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)e^{ix.\xi}dx. \tag{I.1.7}$$

3) Considérons un isomorphisme l de $\mathbb{R}^d$ et notons l_* l'inverse de la transposée de l :

$$\forall x,\ \xi\in\mathbb{R}^d l^{-1}(x).\xi = x.l_*(\xi).$$

Alors pour tout élément φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi\circ l$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et vérifie

$$\forall\xi\in\mathbb{R}^d\quad \mathcal{F}(\varphi\circ l) = \frac{1}{|det\, l|}\mathcal{F}(\varphi)\circ l_*. \tag{I.1.8}$$

Considérons un opérateur différentiel linéaire et à coefficients constants $L = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$, un élément ψ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et l'équation aux dérivées partielles

$$L\varphi = \psi. \tag{E}$$

Remarquons que d'après la proposition 1.1.2, nous avons

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \quad \mathcal{F}(L\varphi)(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(\xi).$$

Ainsi, un élément φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si

$$P\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(\psi)$$

où P désigne le polynôme $\xi \longmapsto P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} i^{|\alpha|} a_\alpha \xi^\alpha$

Exemple 1.1.6. *Considérons l'opérateur de Laplace $\triangle = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}$ et l'équation de Laplace $\triangle \varphi = 0$. Pour tout élément φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons*

$$\begin{aligned} -\triangle \varphi = 0 &\iff \forall \xi \in \mathbb{R}^d \quad \sum_{j-1}^{d} \xi_j^2 \widehat{\varphi}(\xi) = 0 \\ &\iff \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \quad \widehat{\varphi}(\xi) = 0 \\ &\iff \forall \xi \in \mathbb{R}^d \quad \widehat{\varphi}(\xi) = 0 \\ &\iff \varphi = 0. \end{aligned}$$

Remarquons que si le polynôme P ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^d$ alors pour tout élément φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons

$$\begin{aligned} L\varphi = \psi &\iff P\varphi = \mathcal{F}(\psi) \\ &\iff \mathcal{F}(\varphi) = \frac{1}{P}\mathcal{F}(\psi) \\ &\iff \varphi = \overline{\mathcal{F}}\left[P^{-1}\mathcal{F}(\psi)\right] \end{aligned}$$

car $P^{-1}\mathcal{F}(\psi)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 1.1.7. *Soit ψ un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons*

$$\begin{aligned} -\triangle \varphi + \varphi = \psi &\iff \forall \xi \in \mathbb{R}^d \ \ (|\xi|^2 + 1)\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(\psi)(\xi) \\ &\iff \forall \xi \in \mathbb{R}^d \ \ \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2 + 1}\mathcal{F}(\psi)(\xi) = R(\xi)\mathcal{F}(\psi)(\xi) \\ &\iff \varphi = \overline{\mathcal{F}}\left[R\mathcal{F}(\psi)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\triangle \varphi = \psi &\iff \forall \xi \in \mathbb{R}^d \quad |\xi|^2 \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(\psi)(\xi) \\ &\iff \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus 0 \quad \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2}\mathcal{F}(\psi)(\xi). \end{aligned}$$

Nous constatons que $\xi \longmapsto |\xi|^{-2}\mathcal{F}(\psi)(\xi)$ n'appartient toujours pas à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

$-\triangle \varphi = \psi$ est appelée une équation de Poisson.

1.2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Les considérations faites au paragraphe précédent conduisent à la question suivante : peut-on étendre les notions de dérivation partielle et de transformation de Fourier à un espace plus vaste que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et dans lequel on dispose de formules analogues à (I.1.4) et (I.1.6) ?

L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^d$ permet de répondre positivement à cette question. Avant de l'introduire, rappelons quelques compléments sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1.2.1. $\{p_{\alpha,\,\beta}\,:\,\alpha,\ \beta\in\mathbb{N}^d\}$ *est un ensemble de semi-normes définissant sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *une topologie d'espace de Fréchet (espace vectoriel topologique complexe, localement convexe, métrisable et complet).*
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *sera toujours considéré comme muni de la topologie définie par* $\{p_{\alpha,\,\beta}\,:\,\alpha,\ \beta\in\mathbb{N}^d\}$.

Proposition 1.2.2. *1) Pour tout multi-indice* α *de* $\mathbb{N}^d$, $\varphi\longmapsto\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(\varphi)$ *et* $\varphi\longmapsto M_\alpha(\varphi)$ *sont des endomorphismes continus de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
2) Lorsque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *est muni de la topologie produit de celle de ses facteurs les produits*

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\\ (\varphi,\ \psi) & \longmapsto & \varphi\psi\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\\ (\varphi,\ \psi) & \longmapsto & \varphi*\psi\end{array}$$

sont continus.
3) $\mathcal{F}$ *est un homéomorphisme de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *sur lui-même.*
4) Pour tout élément p *de* $[1,\ +\infty]$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *est inclus dans l'espace de Lebesgue* $L^p(\mathbb{R}^d)=L^p(\mathbb{R}^d,\ dx)$ *muni de sa norme usuelle* $f\longmapsto\|f\|_p$.
En plus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *lorsque* $1\le p<+\infty$.

L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^d$ est par définition, le dual topologioque de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d$ muni de la topologie $*$-faible (topologie de la convergence simple).

Exemple 1.2.3. *1) Considérons un élément* f *de* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ *(* f *est la classe d'équivalence modulo l'égalité presque partout, d'une fonction mesurable et intégrable sur tout sous-ensemble compact de* $\mathbb{R}^d$*).*
Supposons qu'il existe un entier positif k *tel que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^{-\frac{k}{2}}|f(x)|dx<\infty$.
Nous avons, pour tout élément φ *de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)\varphi(x)|dx &= \int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|(1+|x|^2)^{-\frac{k}{2}}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|\varphi(x)|dx\\ &\le 2^{\frac{k}{2}-1}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|(1+|x|^2)^{-\frac{k}{2}}(|\varphi(x)|+|x|^k|\varphi(x)|)dx\\ &\le 2^{\frac{k}{2}-1}\left[p_{0,\,0}(\varphi)+\sum_{|\alpha|=k}p_{\alpha,\,0}(\varphi)\right]\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|(1+|x|^2)^{-\frac{k}{2}}dx<+\infty\end{aligned}$$

et par suite , $f\varphi$ *est intégrable et vérifie*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\varphi(x)dx\right|\le 2^{\frac{k}{2}-1}\left[p_{0,\,0}(\varphi)+\sum_{|\alpha|=k}p_{\alpha,\,0}(\varphi)\right]\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|(1+|x|^2)^{-\frac{k}{2}}dx.$$

Ainsi, compte tenu de la linéarité de l'intégrale, $\varphi \longmapsto \langle T_f,\ \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx$ *est une distribution tempérée.*
2) Considérons un élément p *de* $[1,\ \infty]$ *et un entier* $k > \frac{d}{p'}$ *où* p' *désigne l'exposant conjugué de* $p\ :\ \dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1$ *(avec la convention* $\dfrac{1}{+\infty} = 0$*).*
Remarquons que :
• $x \longmapsto g(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{k}{2}}$ *appartient à* $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$
• *tout élément* f *de* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *appartient à* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ *et vérifie*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|(1+|x|^2)^{-\frac{k}{2}}dx \leq \|f\|_p\|g\|_{p'} < +\infty.$$

Par conséquent, d'après le point 1), pour tout élément f *de* $L^p(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \longmapsto \langle T_f,\ \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx$ *appartient à* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *et en plus,*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad |\langle T_f, \varphi\rangle| \leq 2^{\frac{k}{2}-1}\|f\|_p\|g\|_{p'}\left[p_{0,\,0}(\varphi) + \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha,\,0}(\varphi)\right].$$

La linéarité de l'intégrale et l'inégalité précédente montrent que $f \longmapsto T_f$ *est une application linéaire continue de* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*.*
3) Considérons un élément γ *de* $]0,\ 1[$ *et le noyau de Riesz* k_γ *défini par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d\backslash 0 \quad k_\gamma(x) = |x|^{d(\gamma-1)}.$$

Il est aisé de voir que k_γ *appartient à* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ *et vérifie*

$$\int_{\mathbb{R}^d} k_\gamma(x)(1+|x|^2)^{-\frac{d}{2}}dx \leq \int_{|x|\leq 1} |x|^{d(\gamma-1)}dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{d+d(1-\gamma)}}dx < +\infty.$$

Donc d'après le point 1), $\varphi \longmapsto \langle T_{k_\gamma},\ \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} k_\gamma(x)\varphi(x)dx$ *est une distribution tempérée sur* $\mathbb{R}^d$*.*

Définition 1.2.4. *Une fonction* f *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^d$ *est dite à croissance lente lorsqu'elle vérifie*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d \ \ \exists k(\alpha) \in \mathbb{N}^*\ :\ \sup_{x\in\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^{-\frac{k(\alpha)}{2}}\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(f)(x)\right| < +\infty.$$

Remarque 1.2.5. *Considérons un élément* S *de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *et une fonction* f *à croissance lente sur* $\mathbb{R}^d$*. Il est clair que* $\varphi \longmapsto f\varphi$ *est un endomorphisme continu de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *et par suite* $\varphi \longmapsto \langle S,\ f\varphi\rangle$ *est une distribution tempérée. Nous notons*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \ \ \langle fS,\ \varphi\rangle = \langle S,\ f\varphi\rangle \tag{I.2.1}$$

En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $x \longmapsto m_\alpha(x) = (ix)^\alpha$ *est à croissance lente sur* $\mathbb{R}^d$ *et nous posons*

$$M_\alpha(S) = m_\alpha S \tag{I.2.2}$$

Remarque 1.2.6. *Considérons deux éléments* φ *et* ψ *de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*.*
1) En utilisant une intégration par parties et le fait que $\lim\limits_{|x|\longrightarrow+\infty}\varphi(x) = 0 = \lim\limits_{|x|\longrightarrow+\infty}\psi(x)$*, nous obtenons :*

$$\forall j \in \{1,\ 2,\ ...,\ d\} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)\psi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x)dx$$

et par suite,

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}^d\quad \int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(\varphi)(x)\psi(x)dx=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(\psi)(x)dx$$

c'est-à-dire que

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}^d\quad \langle T_{\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(\varphi)},\ \psi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle T_\varphi,\ \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(\psi)\rangle$$

2) En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)\psi(\xi)d\xi &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)e^{-ix.\xi}dx\right]\psi(\xi)d\xi\\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\left[\int_{\mathbb{R}^d}e^{-ix.\xi}\psi(\xi)d\xi\right]dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\mathcal{F}(\psi)(x)dx\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\langle T_{\mathcal{F}(\varphi)},\ \psi\rangle=\langle T_\varphi,\ \mathcal{F}(\psi)\rangle$$

3) Grâce à un changement de variables et au théorème de Fubini-Tonelli nous obtenons pour tout élément θ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi*\psi(x)\theta(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x-y)\psi(y)dy\right]\theta(x)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(z)\psi(x-z)dz\right]\theta(x)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(z)\left[\psi(x-z)\theta(x)dx\right]dz\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(z)\left[\int_{\mathbb{R}^d}\psi(-(z-x))\theta(x)dx\right]dz\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\langle T_{\varphi*\psi},\ \theta\rangle=\langle T_\varphi,\widetilde{\psi}*\theta\rangle$$

où $\widetilde{\psi}$ est définie par

$$\forall u\in\mathbb{R}^d\quad \widetilde{\psi}(u)=\psi(-u).$$

Les formules obtenues dans les remarques ci-dessus conduisent à étendre les notions de dérivation partielle, transformation de Fourier et produit de convolution comme suit

Définition 1.2.7. *Considérons une distribution tempérée S sur $\mathbb{R}^d$.*
1) Pour tout multi-indice $\alpha\in\mathbb{N}^d$, $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(S)$ est définie par

$$\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\quad \left\langle\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(S),\ \varphi\right\rangle=(-1)^{|\alpha|}\left\langle S,\ \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(\varphi)\right\rangle \tag{I.2.3}$$

2) La transformée de Fourier $\mathcal{F}(S)=\widehat{S}$ et la cotransformée de Fourier $\overline{\mathcal{F}}(S)$ de S sont définies par

$$\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\quad \langle\mathcal{F}(S),\ \varphi\rangle=\langle S,\ \mathcal{F}(\varphi)\rangle\ \text{ et }\ \langle\overline{\mathcal{F}}(S),\ \varphi\rangle=\langle S,\ \overline{\mathcal{F}}(\varphi)\rangle. \tag{I.2.4}$$

3) Pour tout ψ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, le produit de convolution de $S*\psi$ est défini par

$$\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\quad \langle S*\psi,\ \varphi\rangle=\langle S,\widetilde{\psi}*\varphi\rangle. \tag{I.2.5}$$

Remarque 1.2.8. *Considerons un élément* $(S,\ \alpha,\ \psi)$ *de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{N}^d\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
1) Il est clair que $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(S)$, $\mathcal{F}(S)$, $\overline{\mathcal{F}}(S)$ *et* $S*\psi$ *sont des éléments de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
2) Notons : $\forall x,\ y\in\mathbb{R}^d \quad \tau_x(\psi)(y)=\psi(y-x)$
Il est clair que, pour tout élément x *de* $\mathbb{R}^d$, $\tau_x(\widetilde{\psi})$ *appartient à* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. *En plus, on montre que* $x\longmapsto\langle S,\ \tau_x(\widetilde{\psi})\rangle$ *est une fonction à croissance lente sur* $\mathbb{R}^d$ *vérifiant*

$$S*\psi=T_{\langle S,\,\tau_\cdot(\widetilde{\psi})\rangle} \tag{I.2.6}$$

(voir [3] page 151).
En particulier, si f *est un élément de* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ *tel que* $\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^{-\frac{k}{2}}|f(x)|dx<+\infty$ *pour un entier positif* k, *alors la fonction* $f*\psi$ *définie par*

$$\forall x\in\mathbb{R}^d \quad f*\psi(x)=\langle T_f,\ \tau_x(\widetilde{\psi})\rangle=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\psi(x-y)dy \tag{I.2.7}$$

est à croissance lente sur $\mathbb{R}^d$ *et vérifie*

$$T_f*\psi=T_{f*\psi}. \tag{I.2.8}$$

3) Pour tout élément φ *de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *nous avons*

$$\langle\overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(S)],\ \varphi\rangle=\langle\mathcal{F}(S),\ \overline{\mathcal{F}}(\varphi)\rangle=\langle S,\ \mathcal{F}\circ\overline{\mathcal{F}}(\varphi)\rangle=\langle S,\ \varphi\rangle$$

et

$$\langle\mathcal{F}[\overline{\mathcal{F}}(S)],\ \varphi\rangle=\langle\overline{\mathcal{F}}(S),\ \overline{\mathcal{F}}(\varphi)\rangle=\langle S,\ \mathcal{F}\circ\overline{\mathcal{F}}(S)\rangle=\langle S,\ \varphi\rangle.$$

Donc

$$\mathcal{F}\circ\overline{\mathcal{F}}(S)=\overline{F}\circ\mathcal{F}(S)=S \tag{I.2.9}$$

4) Considérons un élément φ *de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Nous avons

$$\left\langle\mathcal{F}\left[\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(S)\right],\ \varphi\right\rangle=\left\langle\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(S),\ \mathcal{F}(\varphi)\right\rangle=(-1)^{|\alpha|}\left\langle S,\ \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}[\mathcal{F}(\varphi)]\right\rangle$$

et par suite, d'après I.1.4

$$\left\langle\mathcal{F}\left[\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(S)\right],\ \varphi\right\rangle=\langle S,\ \mathcal{F}[M_\alpha(\varphi)]\rangle=\langle\mathcal{F}(S),\ M^\alpha(\varphi)\rangle$$

Donc

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(S)\right]=M_\alpha[\mathcal{F}(S)]. \tag{I.2.10}$$

De même nous avons

$$\mathcal{F}[M_\alpha(S)]=(-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}[\mathcal{F}(S)] \tag{I.2.11}$$

5) Pour tout élément φ *de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *nous avons*

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{F}(S*\psi),\ \varphi\rangle &= \langle S*\psi,\ \mathcal{F}(\psi)\rangle=\langle S,\ \widetilde{\psi}*\mathcal{F}(\varphi)\rangle\\ &= \langle S,\ \mathcal{F}[\overline{\mathcal{F}}(\widetilde{\psi}*\mathcal{F}(\varphi))]\rangle=\langle\mathcal{F}(S),\ \overline{\mathcal{F}}(\widetilde{\psi})\varphi\rangle=\langle\mathcal{F}(S),\ \mathcal{F}(\psi)\varphi\rangle\\ &= \langle\mathcal{F}(S)\mathcal{F}(\psi),\ \varphi\rangle\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{F}(S*\psi)=\mathcal{F}(S)\mathcal{F}(\psi). \tag{I.2.12}$$

Exemple 1.2.9. *1) Considérons un élément f de $L^1(\mathbb{R}^d)$.*
Il existe une suite $(\psi_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers f dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.
Remarquons que pour tout élément φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(\varphi)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ et

$$\|\mathcal{F}(\varphi)\|_\infty = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}(\varphi)(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|dx = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\|\varphi\|_1.$$

Par conséquent, $(\mathcal{F}(\psi_n))_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^d$, de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme. Par suite $(\mathcal{F}(\psi_n))_{n\geq 1}$ converge uniformement vers une fonction continue et bornée que nous noterons $\mathcal{F}(f)$ ou $\widehat{f}$ et qui vérifie

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{+\infty} \leq (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\|f\|_1 \tag{I.2.13}$$

Remarquons que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathcal{F}(\psi_n))(\xi) = \lim_{n\longrightarrow\infty}(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_n(x)e^{-ix.\xi}dx = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix.\xi}dx \tag{I.2.14}$$

$$\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\ \ \langle\mathcal{F}(T_f),\ \varphi\rangle = \langle T_f,\ \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\mathcal{F}(\varphi)(\xi)d\xi = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \psi_n(\xi)\mathcal{F}(\varphi)(\xi)d\xi$$

et par suite, d'après la remarque 1.2.6 2)

$$\begin{aligned}\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \langle\mathcal{F}(T_f),\ \varphi\rangle &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\psi_n)(\xi)\varphi(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(\xi)\varphi(\xi)d\xi \\ &= \langle T_{\mathcal{F}(f)},\ \varphi\rangle\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}(f)}. \tag{I.2.15}$$

2) Considerons un élément f de $L^2(\mathbb{R}^d)$
• Il existe une suite $(\psi_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.
• Remarquons que

$$\begin{aligned}\forall\varphi,\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathcal{F}(\varphi)}(x)\mathcal{F}(\psi)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathcal{F}}(\overline{\varphi})(x)\mathcal{F}(\psi)(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[\overline{\mathcal{F}}(\overline{\varphi})](x)\psi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi}(x)\psi(x)dx.\end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \|\mathcal{F}(\varphi)\|_2 = \|\varphi\|_2.$$

En particulier,

$$\forall n,\ m \in \mathbb{N} \quad \|\mathcal{F}(\psi_m) - \mathcal{F}(\psi_n)\|_2 = \|\mathcal{F}(\psi_m - \psi_n)\|_2.$$

Ainsi $(\mathcal{F}(\psi_m))_{m\geq 0}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et y converge vers un élément que nous noterons $\mathcal{F}(f)$ ou $\widehat{f}$ et qui vérifie l'identité de Plancherel

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2. \tag{I.2.16}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\quad \langle\mathcal{F}(T_f),\ \varphi\rangle &= \langle T_f,\ \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}(\varphi)(x)dx\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\psi_n(x)\mathcal{F}(\varphi)(x)dx\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}(\psi_n)(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}(f)(x)\varphi(x)dx\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}(f)}.$$

3) Considérons un élément γ de $]0,\ 1[$ et le noyau de Riesz k_γ.

a) Supposons que $\gamma < \dfrac{1}{2}$.

Nous avons

$$k_\gamma = f_1 + f_2 \text{ avec } f_1 = k_\gamma\chi_{\{x\in\mathbb{R}^d\,:\,|x|<1\}} \text{ et } f_2 = k_\gamma\chi_{\{x\in\mathbb{R}^d\,:\,|x|\geq 1\}}$$

.

• Remarquons que f_1 appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$ et f_2 à $L^2(\mathbb{R}^d)$ car $2d(1-\gamma) > d$. Ainsi d'après les points 1) et 2), $\mathcal{F}(f_1)$ et $\mathcal{F}(f_2)$ appartiennent respectivement à $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$. En plus,

$$\mathcal{F}(T_{k_\gamma}) = \mathcal{F}(T_{f_1+f_2}) = T_{\mathcal{F}(f_1)} + T_{\mathcal{F}(f_2)} = T_h$$

avec $h = \mathcal{F}(f_1) + \mathcal{F}(f_2)$.

• Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$, posons

$$\forall(r,\ x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d,\quad f_r(x) = r^{-d}f(r^{-1}x).$$

Pour tout réel $r > 0$ nous avons

$$\begin{aligned}\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\ \forall\xi\in\mathbb{R}^d\ \ \mathcal{F}(\varphi)(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} r^{-d}\varphi(r^{-1}x)e^{-ix.\xi}dx\\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)e^{-ix.(r\xi)}dx = \mathcal{F}(\varphi)(r\xi).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\ \ \langle T_{h_r},\ \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} r^{-d}h(r^{-1}x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\varphi(rx)dx\\ &= \langle\mathcal{F}(T_{k_\gamma}),\ r^{-d}\varphi_{r^{-1}}\rangle = r^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} k_\gamma(x)\mathcal{F}(\varphi)(r^{-1}x)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} k_\gamma(rx)\mathcal{F}(\varphi)(x)dx = r^{d(\gamma-1)}\langle T_{k_\gamma},\ \mathcal{F}(\varphi)\rangle\\ &= r^{d(\gamma-1)}\langle\mathcal{F}(T_{k_\gamma}),\ \varphi\rangle = \langle T_{r^{d(\gamma-1)}h},\ \varphi\rangle\end{aligned}$$

et par suite, pour presque tout élément x de $\mathbb{R}^d$

$$h_r(x) = r^{d(\gamma-1)}h(x)$$

c'est-à-dire que

$$h(r^{-1}x) = r^{d\gamma}h(x). \tag{*}$$

Pour tout isomorphisme orthogonal l de $\mathbb{R}^d$ nous avons

$$\begin{aligned}\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\ \ \langle T_{h\circ l},\ \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} h\circ l(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\varphi\circ l^{-1}(x)dx\\ &= \langle\mathcal{F}(T_{k_\gamma}),\ \varphi\circ l^{-1}\rangle = \langle T_{k_\gamma},\ \mathcal{F}(\varphi\circ l^{-1})\rangle\end{aligned}$$

et donc, d'après la proposition 1.1.5 3),

$$\begin{aligned}\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\ \ \langle T_{h\circ l},\ \varphi\rangle &= \langle T_{k_\gamma},\ \mathcal{F}(\varphi)\circ(l^{-1})_*\rangle = \langle T_{k_\gamma},\ \mathcal{F}(\varphi)\circ l^t\rangle\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} k_\gamma(x)\mathcal{F}(\varphi)\circ l^t(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} k_\gamma\circ l_*(x)\mathcal{F}(\varphi)(x)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} k_\gamma(x)\mathcal{F}(\varphi)(x)dx = \langle T_{k_\gamma},\ \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \langle T_h,\ \varphi\rangle\end{aligned}$$

où l^t désigne la transposée de l.
Ainsi, pour tout isomorphisme orthogonal l de $\mathbb{R}^d$, nous avons

$$h(l(x)) = h(x) \tag{**}$$

pour presque tout élément x de $\mathbb{R}^d$.
Les relations (*) et (**) donnent à penser qu'il existe une constante $C(d,\ \gamma)$ telle que $h(x) = C(d,\ \gamma)|x|^{-d\gamma}$. Et effectivement on montre que

$$\forall\gamma\in]0,\ 1[\ \ \mathcal{F}(T_{k_\gamma}) = T_{C(d,\ \gamma)k_{1-\gamma}}\ \text{avec}\ C(d,\ \gamma) = 2^{d(\gamma-\frac{1}{2})}\frac{\Gamma(\frac{d\gamma}{2})}{\Gamma(\frac{d(1-\gamma)}{2})} \tag{I.2.17}$$

(voir [3] page 157).

Application 1.2.10. *Supposons que $d\geq 3$*
1) Considérons un élément ψ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et l'équation de Poisson.

$$-\triangle S = T_\psi \tag{E$'$}$$

Pour tout élément S de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}-\triangle S = T_\psi &\iff -P\mathcal{F}(S) = \mathcal{F}(T_{\mathcal{F}(\psi)})\quad\text{où}\quad P(x) = \sum_{j=1}^{d}(ix_j)^2 = -|x|^2 = -\frac{1}{k_{\frac{d-2}{d}}(x)}\\ &\iff \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\ \ \langle\mathcal{F}(S),\ \varphi\rangle = \langle k_{\frac{d-2}{d}}T_{\mathcal{F}(\psi)},\ \varphi\rangle\\ &\iff \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\ \ \langle\mathcal{F}(S),\ \varphi\rangle = \langle\mathcal{F}(\psi)T_{k_{1-\frac{2}{d}}},\ \varphi\rangle\\ &\iff \mathcal{F}(S) = \mathcal{F}(\psi)T_{k_{1-\frac{2}{d}}}\\ &\iff \mathcal{F}(S) = C(d,\ \frac{d}{2})^{-1}\mathcal{F}(\psi)\mathcal{F}(T_{k_{\frac{2}{d}}})\ \ \text{d'après (I.2.17)}\\ &\iff S = C(d,\ \frac{d}{2})^{-1}(T_{k_{\frac{2}{d}}}*\psi) = C(d,\ \frac{d}{2})^{-1}(T_{k_{\frac{2}{d}}*\psi})\ \text{d'après (I.2.9) et (I.2.8)}\end{aligned}$$

$I_{\frac{2}{d}}(\psi) = C(d,\ \frac{d}{2})^{-1}T_{k_{\frac{2}{d}}*\psi}$ est appelée l'intégrale fractionnaire d'ordre 2 et notée $(-\triangle)^{-1}(\psi)$ pour rendre compte de la relation

$$-\triangle\left[I_{\frac{2}{d}}(\psi)\right] = \psi.$$

2) Supposons que $0<\gamma<1$ et ψ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Par analogie avec ce qui précède on pose

$$I_\gamma(\psi) = C(d,\ \gamma)^{-1}T_{k_\gamma*\psi} = (-\triangle)^{-\frac{d\gamma}{2}}(\psi) \tag{I.1.15}$$

et on appelle $I_\gamma(\psi)$ l'intégrale fractionnaire (où potentiel de Riesz) d'ordre $d\gamma$ de ψ.

Un problème classique de l'Analyse Harmonique est celui du prolongement de l'intégrale fractionnaire à des espaces contenant $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et de la continuité des prolongements obtenus.

Chapitre 2

Inégalités en norme sur l'intégrale fractionnaire

La fonction caractéristique d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^d$ est notée χ_E et $|E|$ désigne sa mesure de Lebesgue lorsqu'il est Lebesgue mesurable.
Pour tout élément $(x,\ r)$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*$,
• $Q(x,\ r) = \left\{y \in \mathbb{R}^d\ :\ \forall j \in \{1,\ 2,\ ...,\ d\},\ \ |y_j - x_j| \leq \dfrac{r}{2}\right\} = \displaystyle\prod_{j=1}^{d}\left[x_j - \frac{r}{2},\ x_j + \frac{r}{2}\right]$ est le cube fermé de centre x et de longueur de côté r.
• $B(x,\ : r) = \{y \in \mathbb{R}^d\ :\ |y - x| < r\}$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r.
La mesure de Lebesgue de $B(0,\ 1)$ est noté ω_d.
Par cube, nous désignons toujours un cube de $\mathbb{R}^d$ de côtés parallèles aux axes de coordonnées :

$$Q = \prod_{j=1}^{d}[x_j,\ x_j + r[\ \text{ ou }\ \prod_{j=1}^{d}]x_j,\ x_j + r[\ \text{ ou }\ \prod_{j=1}^{d}]x_j,\ x_j + r]\ \text{ ou }\ \prod_{j=1}^{d}[x_j,\ x_j + r].$$

L'ensemble des cubes est noté $\mathcal{Q}$.
Nous supposons que $0 < \gamma < 1$ et posons, pour toute mesure de Radon positive μ sur $\mathbb{R}^d$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \ K_\gamma\mu(x) = k_\gamma * \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k_\gamma(x-y)d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{d(\gamma-1)}d\mu(y).$$

Dans la suite nous mettrons en évidence des couples $(X,\ Y)$ d'espaces de Banach pour lesquels K_γ (et donc I_γ) peut-être considéré comme une application continue de X dans Y.
Commençons par introduire des opérateurs entre lesquels et K_γ existent des contrôles mutuels.

2.1 Opérateurs maximaux

Définition 2.1.1. *Supposons que $1 \leq \alpha \leq +\infty$. Pour toute mesure de Radon positive μ sur $\mathbb{R}^d$ et tout élément f de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, les fonctions maximales sphériques $m^s_\alpha\mu$ et $m^s_\alpha f$ sont définies sur $\mathbb{R}^d$ par*

$$m^s_\alpha\mu(x) = \sup_{r>0}|B(x,\ r)|^{\frac{1}{\alpha}-1}\mu(B(x,\ r)) \tag{II.1.1}$$

$$m^s_\alpha f(x) = \sup_{r>0}|B(x,\ r)|^{\frac{1}{\alpha}-1}\|f\chi_{B(x,\ r)}\|_1 \tag{II.1.2}$$

avec la convention $\dfrac{1}{\infty} = 0.$

Remarque 2.1.2. *Considérons une mesure de Radon positive μ sur $\mathbb{R}^d$ et un point x de $\mathbb{R}^d$.*
1) Nous avons

$$\begin{aligned}\forall r \in \mathbb{R}_+^* \;\; K_\gamma\mu(x) &\geq \int_{B(x,\ r)} |x-y|^{d(\gamma-1)} d\mu(y) \geq r^{d(\gamma-1)}\mu(B(x,\ r)) \\ &= \omega_d^{1-\gamma}|B(x,\ r)|^{\gamma-1}\mu(B(x,\ r).\end{aligned}$$

$$K_\gamma\mu(x) \geq \omega_d^{1-\gamma} \sup_{r>0} |B(x,\ r)|^{\gamma-1}\mu(B(x,\ r)) = \omega_d^{1-\gamma} m^s_{\frac{1}{\gamma}}\mu(x). \tag{II.1.3}$$

2) Supposons que $1 \leq \alpha_1 < \dfrac{1}{\gamma} < \alpha_0 \leq +\infty$.
Pour tout nombre réel $\delta > 0$ nous avons

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|<\delta} |x-y|^{d(\gamma-1)} d\mu(y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2^{-(k+1)}\delta \leq |x-y| < 2^{-k}\delta} |x-y|^{d(\gamma-1)} d\mu(y) \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} (2^{-(k+1)}\delta)^{d(\gamma-1)}\mu(B(x,\ 2^{-k}\delta) \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} (2^{-(k+1)}\delta)^{d(\gamma-1)}|B(x,\ 2^{-k}\delta)|^{1-\frac{1}{\alpha_0}} m^s_{\alpha_0}\mu(x) \\ &= 2^{d(1-\gamma)}\omega_d^{1-\frac{1}{\alpha_0}}\delta^{d(\gamma-\frac{1}{\alpha_0})}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{d(\frac{1}{\alpha_0}-\gamma)k}\right] m^s_{\alpha_0}\mu(x).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|\geq\delta} |x-y|^{d(\gamma-1)} d\mu(y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2^{k}\delta \leq |x-y| < 2^{k+1}\delta} |x-y|^{d(\gamma-1)} d\mu(y) \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} (2^{k}\delta)^{d(\gamma-1)}\mu(B(x,\ 2^{k+1}\delta) \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} (2^{k}\delta)^{d(\gamma-1)}|B(x,\ 2^{k+1}\delta)|^{1-\frac{1}{\alpha_1}} m^s_{\alpha_1}\mu(x) \\ &= 2^{d(1-\frac{1}{\alpha_1})}\omega_d^{1-\frac{1}{\alpha_1}}\delta^{d(\gamma-\frac{1}{\alpha_1})}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{d(\gamma-\frac{1}{\alpha_1})k}\right] m^s_{\alpha_1}\mu(x).\end{aligned}$$

Par suite,

$$K_\gamma\mu(x) \leq A\delta^{d(\gamma-\frac{1}{\alpha_0})} m^s_{\alpha_0}\mu(x) + B\delta^{d(\gamma-\frac{1}{\alpha_1})} m^s_{\alpha_1}\mu(x)$$

avec $A = \dfrac{2^{d(1-\gamma)}\omega_d^{1-\frac{1}{\alpha_0}}}{1-2^{d(\frac{1}{\alpha_0}-\gamma)}}$ *et* $B = \dfrac{2^{d(1-\frac{1}{\alpha_1})}\omega_d^{1-\frac{1}{\alpha_1}}}{1-2^{d(\gamma-\frac{1}{\alpha_1})}}$.
En minimisant le second membre de l'inégalité précédente par rapport à la variable δ, nous obtenons l'inégalité de Welland

$$K_\gamma\mu(x) \leq C\left[m^s_{\alpha_0}\mu(x)\right]^{\frac{\frac{1}{\alpha_1}-\gamma}{\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_0}}}\left[m^s_{\alpha_1}\mu(x)\right]^{\frac{\gamma-\frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_0}}} \tag{II.1.4}$$

avec $C = A^{\frac{\frac{1}{\alpha_1}-\gamma}{\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_0}}} B^{\frac{\gamma-\frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_0}}} \left\{\left(\dfrac{\frac{1}{\alpha_1}-\gamma}{\gamma-\frac{1}{\alpha_0}}\right)^{\frac{\gamma-\frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_0}}} + \left(\dfrac{\frac{1}{\alpha_1}-\gamma}{\gamma-\frac{1}{\alpha_0}}\right)^{\frac{\gamma-\frac{1}{\alpha_1}}{\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_0}}}\right\}$.

Dans la définition des opérateurs maximaux, les boules peuvent être remplacées par des cubes.

Définition 2.1.3. *Supposons que* $1 \leq \alpha \leq +\infty$. *Pour toute mesure de Radon positive* μ *sur* $\mathbb{R}^d$ *et tout élément* f *de* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, *les fonctions maximales cubiques* $m_\alpha\mu$ *et* $m_\alpha f$ *sont définies sur* $\mathbb{R}^d$ *par*

$$m_\alpha\mu(x) = \sup_{r>0} |Q(x,\ r)|^{\frac{1}{\alpha}-1}\mu(Q(x,\ r)) \tag{II.1.5}$$

$$m_\alpha f(x) = \sup_{r>0} |Q(x,\ r)|^{\frac{1}{\alpha}-1}\|f\chi_{Q(x,\,r)}\|_1 \tag{II.1.6}$$

Remarque 2.1.4. *Supposons que* $1 \leq \alpha \leq +\infty$ *et considérons une mesure de Radon positive* μ *sur* $\mathbb{R}^d$. *Pour tout élément* x *de* $\mathbb{R}^d$ *nous avons*

- $\forall r \in \mathbb{R}^*_+\ B\left(x,\ \dfrac{r}{2}\right) \subset Q(x,\ r) \subset \overline{B}\left(x,\ \dfrac{\sqrt{d}r}{2}\right)$ *et* $|B(x,\ r)| = \omega_d|Q(x,\ r)| = |\overline{B}(x,\ r)|$

$$\begin{aligned}\forall r \in \mathbb{R}^*_+,\ \forall \rho > \frac{\sqrt{d}r}{2}\quad |Q(x,\ r)|^{\frac{1}{\alpha}-1}\mu(Q(x,\ r)) &\leq |Q(x,\ r)|^{\frac{1}{\alpha}-1}\mu(B(x,\ \rho))\\ &= \left[\omega_d\left(\frac{\rho}{r}\right)^d\right]^{1-\frac{1}{\alpha}}|B(x,\ \rho)|^{\frac{1}{\alpha}-1}\mu(B(x,\ \rho)).\end{aligned}$$

$$\forall r \in \mathbb{R}^*_+,\ \forall \rho > \frac{\sqrt{d}r}{2}\quad |Q(x,\ r)|^{\frac{1}{\alpha}-1}\mu(Q(x,\ r)) \leq \left[\omega_d\left(\frac{\rho}{r}\right)^d\right]^{1-\frac{1}{\alpha}} m^s_\alpha\mu(x)$$

$$\forall r \in \mathbb{R}^*_+,\quad |Q(x,\ r)|^{\frac{1}{\alpha}-1}\mu(Q(x,\ r)) \leq \left[\omega_d\left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^d\right]^{1-\frac{1}{\alpha}} m^s_\alpha\mu(x)$$

$$m_\alpha\mu(x) \leq \left[\omega_d\left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^d\right]^{1-\frac{1}{\alpha}} m^s_\alpha\mu(x) \tag{II.1.7}$$

- $$\begin{aligned}\forall r \in \mathbb{R}^*_+\quad |B(x,\ r)|^{\frac{1}{\alpha}-1}\mu(B(x,\ r)) &\leq |B(x,\ r)|^{\frac{1}{\alpha}-1}\mu(Q(x,\ 2r))\\ &= \left(\frac{2^d}{\omega_d}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}|Q(x,\ 2r)|^{\frac{1}{\alpha}-1}\mu(Q(x,\ 2r)).\end{aligned}$$

$$\forall r \in \mathbb{R}^*_+\quad |B(x,\ r)|^{\frac{1}{\alpha}-1}\mu(B(x,\ r)) \leq \left(\frac{2^d}{\omega_d}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}} m_\alpha\mu(x)$$

$$m^s_\alpha\mu(x) \leq \left(\frac{2^d}{\omega_d}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}} m_\alpha\mu(x) \tag{II.1.8}$$

Les contrôles obtenus dans les remarques précédentes permettent d'obtenir des inégalités portant sur les normes de $m_\alpha\mu$ et μ dans les espaces définis ci-dessous.

Définition 2.1.5. *1) Considérons un élément* α *de* $[1,\ +\infty[$ *et une mesure de Radon positive* ν *sur* $\mathbb{R}^d$.
a) Pour tout élément f *de* $L^0(\mathbb{R}^d,\ \nu)$ *(espace des classes d'équivalence modulo l'égalité* ν*-presque partout, de fonctions* ν*- mesurables sur* $\mathbb{R}^d$*),*

$${}_\nu\|f\|^*_{\alpha,+\infty} = \sup_{t>0} t[\nu(\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ |f(x)| > t\})]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

b) $L^{\alpha,\,+\infty}(\mathbb{R}^d,\ \nu) = \left\{f \in L^0(\mathbb{R}^d,\ \nu)\ :\ {}_\nu\|f\|^*_{\alpha,\,+\infty} < +\infty\right\}$ *est l'espace de Lebesgue* L^α*-faible par rapport à* ν *sur* $\mathbb{R}^d$*.*
2) Considérons des éléments q*,* p*,* α *de* $[1,\ +\infty]$*.*
a) Pour tout élément f *de* $L^0(\mathbb{R}^d) = L^0(\mathbb{R}^d,\ dx)$

- $$\|f\|_{F(q,\,p,\,\alpha)} = \sup\left\{\left(\sum_{i\in I}\left(|Q_i|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{Q_i}\|_q\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\ :\ \{Q_i\ :\ i\in I\}\subset\mathcal{Q};\ Q_i\cap Q_j=\emptyset \text{ pour } i\neq j\right\}\ \text{si } p<+\infty$$

- $\|f\|_{F(q,\,\infty,\,\alpha)} = \sup\left\{|Q|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{Q_i}\|_q\ :\ Q\in\mathcal{Q}\right\}$ *si* $p=+\infty$*.*

b) $F(q,\ p,\ \alpha) = \left\{f\in L^0(\mathbb{R}^d)\ :\ \|f\|_{F(q,\,p,\,\alpha)}<+\infty\right\}$
c) Pour tout élément μ *de* $M(\mathbb{R}^d)$ *(espace des mesures de Radon sur* $\mathbb{R}^d$*)*

- $$\|\mu\|_{T(p,\,\alpha)} = \sup\left\{\left(\sum_{i\in I}\left(|Q_i|^{\frac{1}{\alpha}-1}|\mu|(Q_i)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\ :\ \{Q_i\ :\ i\in I\}\subset\mathcal{Q};\ Q_i\cap Q_j=\emptyset \text{ pour } i\neq j\right\}\ \text{si } p<+\infty$$

- $\|\mu\|_{T(\infty,\,\alpha)} = \sup\left\{|Q|^{\frac{1}{\alpha}-1}|\mu|(Q)\ :\ Q\in\mathcal{Q}\right\}$

où $|\mu|$ *désigne la variation totale de* μ*.*
d) $T(p,\ \alpha) = \left\{\mu\in M(\mathbb{R}^d)\ :\ \|\mu\|_{T(p,\,\alpha)}<+\infty\right\}$

Remarque 2.1.6. *1) Les espaces de Lebesgue faibles sont bien connus (voir [8]). Rappelons que si* ν *est une mesure de Radon positive sur* $\mathbb{R}^d$ *et* $1\leq\alpha\leq+\infty$ *alors*
a) $\forall f\in L^0(\mathbb{R}^d,\ \nu)\quad {}_\nu\|f\|^*_{\alpha,\,+\infty}\leq\|f\|_\alpha$
et donc $L^\alpha(\mathbb{R}^d,\ \nu)$ *est inclus dans* $L^{\alpha,\,\infty}(\mathbb{R}^d,\ \nu)$*.*
b) Lorsque $1<\alpha\leq+\infty$*, il existe sur* $L^{\alpha,\,\infty}(\mathbb{R}^d,\ \nu)$ *une norme* $f\longmapsto\|f\|_{\alpha,\,+\infty}$ *telle que*
• $\forall f\in L^0(\mathbb{R}^d,\ \nu)\quad {}_\nu\|f\|^*_{\alpha,\,+\infty}\leq\ {}_\nu\|f\|_{\alpha,\,+\infty}\leq\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\ {}_\nu\|f\|^*_{\alpha,\,+\infty}$
• $\left(L^{\alpha,\,\infty}(\mathbb{R}^d,\ \nu),\ \|\cdot\|_{\alpha,\,+\infty}\right)$ *est un espace de Banach complexe.*
2) Les espaces $F(q,\ p,\ \alpha)$ *et* $T(p,\ \alpha)$ *sont étudiés dans [4]. Notons que*
a) pour $1\leq q\leq\alpha\leq+\infty$*,* $F(q,\ +\infty,\ \alpha)$ *est un espace de Morrey*
b) pour $1\leq q\leq\alpha\leq p\leq+\infty$*,* $\left(F(q,\ p,\ \alpha),\ \|\cdot\|_{F(q,\,p,\,\alpha)}\right)$ *est un espace de Banach sur* $\mathbb{C}$ *et*
• $\forall f\in L^0(\mathbb{R}^d)\quad\|f\|_{F(q,\,p,\,\alpha)}\leq\|f\|_{F(q,\,\alpha,\,\alpha)}\leq\|f\|_\alpha$
et donc $L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ *est inclus dans* $F(q,\ p,\ \alpha)$
• $L^\alpha(\mathbb{R}^d)\subsetneq F(q,\ p,\ \alpha)$ *si* $q<\alpha<p$
c) pour $1\leq\alpha\leq p\leq+\infty$*,* $\left(T(p,\ \alpha),\ \|\cdot\|_{T(p,\,\alpha)}\right)$ *est un espcae de Banach sur* $\mathbb{C}$ *et*
• *si* $p<p_1\leq+\infty$ *alors*
$\forall\mu\in M(\mathbb{R}^d)\quad\|\mu\|_{T(p_1,\,\alpha)}\leq\|\mu\|_{T(p,\,\alpha)}$
et donc $T(p,\ \alpha)$ *est inclus dans* $T(p_1,\ \alpha)$
• $F(1,\ p,\ \alpha)$ *peut être identifié au sous-espace vectoriel normé de* $T(p,\ \alpha)$ *constitué de ses éléments absolument continus par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Pour démontrer les inégalités en norme associées, nous auront besoin du résultat suivant

Proposition 2.1.7 (Lemme de recouvrement de Vitali). *Supposons que*
• E *est un sous-ensemble Lebesgue mesurable de* $\mathbb{R}^d$*.*
• $\{Q_i\ :\ i\in I\}$ *est une famille de cubes vérifiant :* $\sup\limits_{x\in I}|Q_i|<+\infty$ *et* $E\subset\bigcup\limits_{i\in I}Q_i$*.*

Alors il existe une suite $(Q_{i_k})_{k\in K}$ (éventuellement finie) d'éléments deux à deux disjoints de $\{Q_i \ : \ i \in I\}$ vérifiant

$$E \subset \bigcup_{k\in K} 5Q_{i_k}.$$

Démonstration. 1) Pour tout cube Q, notons $l(Q)$ sa longueur de côté : $l(Q) = |Q|^{\frac{1}{d}}$.
Nous allons construire la suite $(Q_{i_k})_{k\in K}$ par réccurrence.
• Choisissons i_1 dans I tel que $l(Q_{i_1}) \geq \dfrac{1}{2} \sup\limits_{i\in I} l(Q_i)$.
• Supposons choisis les indices i_k pour $1 \leq k \leq n$.
Posons $I_n = \{i \in I \ : \ \forall k \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\} \ \ Q_i \cap Q_{i_k} = \emptyset\}$.
Si I_n est vide alors nous arrêtons et $K = \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$.
Sinon nous choisissons i_{n+1} dans I_n tel que $l(Q_{i_{n+1}}) \geq \dfrac{1}{2} \sup\limits_{i\in I_n} l(Q_i)$. Ce procédé nous permet d'obtenir une suite $(Q_{i_k})_{k\in K}$ $(K \subset \mathbb{N})$ d'éléments de $\{Q_i \ : \ i \in I\}$ deux à deux disjoints.
2) a) Supposons que $\sum\limits_{k\in K} |Q_{i_k}| = +\infty$.
Alors évidemment $\sum\limits_{k\in K} |Q_{i_k}| \geq C|E|$ pour tout nombre réel $C > 0$.
b) Supposons que $\sum\limits_{k\in K} |Q_{i_k}| < +\infty$.
• Considérons un nombre réel $\delta > 0$.
Supposons que $(Q_{i_k})_{k\in K}$ possède une sous-suite $(Q_{i_{k(n)}})_{n\geq 1}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad l(Q_{i_{k(n)}}) \geq \delta.$$

Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \delta^d \leq |Q_{i_{k(n)}}|$$

et par suite

$$+\infty = \sum_{n=1}^{+\infty} |Q_{i_{k(n)}}| \leq \sum_{k\in K} |Q_{i_k}| < +\infty.$$

Cela étant absurde nous voyons que

$$\exists n_\delta \in \mathbb{N}^* \ : \ \forall n \geq n_\delta \ \ l(Q_{i_{k(n)}}) < \delta.$$

Ainsi $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} l(Q_{i_k}) = 0$ lorsque K est infini.
• Considérons un élément i de $I \setminus \{i_k \ : \ k \in K\}$.
<u>1er cas</u> : K est infini.
Soit $\hat{k}$ le premier élément de K vérifiant $l(Q_{i_{\hat{k}+1}}) \leq \dfrac{1}{2} l(Q_i)$.
D'après la construction de $(Q_{i_k})_{k\in K}$, nous avons

$$l(Q_{i_{\hat{k}+1}}) < \frac{1}{2} l(Q_i) \Longrightarrow i \notin I_{\hat{k}} \Longrightarrow \exists r \in \{1,\ 2,\ ...,\hat{k}\} \ : \ Q_i \cap Q_{i_r} \neq \emptyset$$

$$r \leq \hat{k} < \hat{k}+1 \Longrightarrow l(Q_{i_r}) \geq \frac{1}{2} l(Q_i).$$

Posons $Q_{i_r} = Q(x_{i_r},\ l_{i_r})$ et $Q_i = Q(x_i,\ l_i)$ et considérons un élément x de $Q_i \cap Q_{i_r}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \forall y \in Q_i \ \ \forall j \in \{1,\ 2,\ ...,\ d\} \ \ |(x_{i_r})_j - y_j| &\leq |(x_{i_r})_j - z_j| + |z_j - (x_i)_j| + |(x_i)_j - y_j| \\ &\leq \frac{1}{2} l_{i_r} + l_i \leq \frac{5}{2} l_{i_r} \end{aligned}$$

et donc
$$Q_i \subset Q(x_{i_r},\ 5l_{i_r}) = 5Q_{i_r}.$$
<u>2e cas</u> : K est fini c'est-à-dire que $K = \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ pour un certain entier $n \geq 1$.
Alors $I_n = \emptyset$ et donc $\{k \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}\ :\ Q_{i_k} \cap Q_i \neq \emptyset\} \neq \emptyset$.
Posons $\hat{k} = \min\{k \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}\ :\ Q_{i_k} \cap Q_i \neq \emptyset\}$.
(i) Supposons que $\hat{k} = 1$.
Alors
$$l(Q_{i_{\hat{k}}}) = l(Q_{i_1}) \geq \frac{1}{2} l(Q_i) \ \text{ et } \ Q_{i_{\hat{k}}} \cap Q_i \neq \emptyset$$
(ii) Supposons que $k > 1$.
Alors i appartient à $I_{\hat{k}-1}$ et donc $l(Q_{i_{\hat{k}}}) \geq \frac{1}{2} l(Q_i)$. En plus $Q_{i_{\hat{k}}} \cap Q_i \neq \emptyset$.
Un raisonnement similaire à celui du 1er cas montre que $Q_i \subset 5Q_{i_{\hat{k}}}$.
Ainsi dans tous les cas, $Q_i \subset \bigcup_{k\in K} 5Q_{i_k}$.
• En définitive nous avons
$$E \subset \bigcup_{i\in I} Q_i \subset \bigcup_{k\in K} 5Q_{i_k}.$$
□

Proposition 2.1.8. *Supposons que :* $0 \leq \dfrac{1}{\beta} < \dfrac{1}{\alpha} \leq 1$, $0 \leq \dfrac{1}{\theta} \leq \dfrac{\alpha}{\beta}$ *et* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{1 - \frac{1}{\theta}}$. *Alors pour toutes mesures de Radon positives* μ *et* ν *sur* $\mathbb{R}^d$*, nous avons*
$$_\nu\|m_\beta \mu\|^*_{p,\ +\infty} \leq 5^{d(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta})} \|\nu\|^{\frac{1}{p}}_{T(\infty,\ \theta)} \|\mu\|_{T(p,\ \alpha)}.$$

Démonstration. Considérons deux mesures de Radon positives μ et ν sur $\mathbb{R}^d$.
Dans le cas où $\|\mu\|_{T(p,\ \alpha)} = +\infty$, l'inégalité à démontrer est évidente.
Nous supposons donc que $\|\mu\|_{T(p,\ \alpha)} < +\infty$.
Considérons un nombre réel $\lambda > 0$ et posons
$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_\beta \mu(x) > \lambda\}.$$
D'après la définition de $m_\beta \mu$, nous avons
$$\forall x \in E_\lambda\ \ \exists r(x) \in \mathbb{R}^*_+\ :\ \lambda < |Q(x,\ r(x))|^{\frac{1}{\beta}-1} \mu\left(Q(x,\ r(x))\right).$$
Remarquons que pour tout élément x de E_λ, nous avons
$$\lambda < |Q(x,\ r(x))|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}} |Q(x,\ r(x))|^{\frac{1}{\alpha}-1} \mu\left(Q(x,\ r(x))\right) \leq |Q(x,\ r(x))|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}} \|\mu\|_{T(p,\ \alpha)}$$
et par suite,
$$r(x)^{d(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta})} < \lambda^{-1} \|\mu\|_{T(p,\ \alpha)}.$$
Puisque $\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta} > 0$, nous avons
$$\sup\{r(x)\ :\ x \in E_\lambda\} \leq \left(\lambda^{-1} \|\mu\|_{T(p,\ \alpha)}\right)^{\frac{1}{d(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta})}} < +\infty.$$
Ainsi donc, d'apès le lemme de recouvrement de Vitali, il existe un sous-ensemble $\{Q_i\ :\ i \in I\}$ de $\{Q(x,\ r(x))\ :\ x \in E_\lambda\}$ vérifiant
• $\forall i',\ i'' \in I \quad i' \neq i'' \Longrightarrow Q_{i'} \cap Q_{i''} = \emptyset$.

• $E_\lambda \subset \bigcup_{i\in I} 5Q_i$.
Par ailleurs nous avons

$$\forall x \in E_\lambda \quad 1 < \lambda^{-1}|Q(x,\, r(x))|^{\frac{1}{\beta}-1}\mu\left(Q(x,\, r(x))\right)$$

et par suite

$$\forall x \in E_\lambda \;\; 1 < \left[\lambda^{-1}|Q(x,\, r(x))|^{\frac{1}{\beta}-1}\mu\left(Q(x,\, r(x))\right)\right]^p.$$

Par conséquent, nous pouvons écrire

$$\nu(E_\lambda) \leq \nu\left(\bigcup_{i\in I} 5Q_i\right) \leq \sum_{i\in I}\nu(5Q_i) \leq \sum_{i\in I}\nu(5Q_i)\left[\lambda^{-1}|Q_i|^{\frac{1}{\beta}-1}\mu(Q_i)\right]^p$$

$$\nu(E_\lambda) \leq \lambda^{-p}\sum_{i\in I}\nu(5Q_i)|5Q_i|^{\frac{1}{\theta}-1}|5Q_i|^{1-\frac{1}{\theta}}\left[|Q_i|^{\frac{1}{\beta}-1}\mu(Q_i)\right]^p$$

$$\nu(E_\lambda) \leq \lambda^{-p}5^{d(1-\frac{1}{\theta})}\sum_{i\in I}\nu(5Q_i)|5Q_i|^{\frac{1}{\theta}-1}\left[|Q_i|^{\frac{1}{p}(1-\frac{1}{\theta})+\frac{1}{\beta}-1}\mu(Q_i)\right]^p$$

$$\nu(E_\lambda) \leq \lambda^{-p}5^{d(1-\frac{1}{\theta})}\|\nu\|_{T(\infty,\,\theta)}\sum_{i\in I}\left[|Q_i|^{\frac{1}{\alpha}-1}\mu(Q_i)\right]^p \leq \lambda^{-p}5^{d(1-\frac{1}{\theta})}\|\nu\|_{T(\infty,\,\theta)}\|\mu\|^p_{T(p,\,\alpha)}$$

$$\lambda\nu(E_\lambda)^{\frac{1}{p}} \leq 5^{d(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta})}\|\nu\|^{\frac{1}{p}}_{T(\infty,\,\theta)}\|\mu\|_{T(p,\,\alpha)}$$

Ainsi

$${}_\nu\|m_\beta\mu\|^*_{p,\,+\infty} = \sup_{\lambda>0}\lambda\nu(E_\lambda)^{\frac{1}{p}} \leq 5^{d(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta})}\|\nu\|^{\frac{1}{p}}_{T(\infty,\,\theta)}\|\mu\|_{T(p,\,\alpha)}.$$

□

2.2 Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev

Des résultats obtenus au paragraphe précédent, nous allons déduire des inégalités en norme portant sur l'intégrale fractionnaire.

Proposition 2.2.1. *Supposons que :* $0 < \gamma < \dfrac{1}{\alpha} \leq 1$, $0 \leq \dfrac{1}{\theta} < \alpha\gamma$ *et* $\dfrac{\frac{1}{\alpha}-\gamma}{1-\frac{1}{\theta}} = \dfrac{1}{q} < \dfrac{1}{p}$. *Alors, il existe une constante réelle* $D > 0$ *telle que pour toutes mesures de Radon positives* μ *et* ν *sur* $\mathbb{R}^d$ *nous ayons*

$${}_\nu\|I_\gamma\mu\|^*_{q,\,+\infty} \leq D\|\nu\|^{\frac{1}{q}}_{T(\infty,\,\theta)}\,\|\mu\|_{T(p,\,\alpha)}. \tag{II.2.1}$$

Démonstration. • Remarquons que :

$$\lim_{\beta\longrightarrow\frac{1}{\gamma}^+}\frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}{1-\frac{1}{\theta}} = \frac{\frac{1}{\alpha}-\gamma}{1-\frac{1}{\theta}} < \frac{1}{p} \;\text{ et }\; \lim_{\beta\longrightarrow\frac{1}{\gamma}^+}\frac{\alpha}{\beta} = \alpha\gamma > \frac{1}{\theta}.$$

Donc il existe un élément β_0 de $\left]\dfrac{1}{\gamma},\; +\infty\right[$ tel que

$$\forall\beta \in \left]\frac{1}{\gamma},\, \beta_0\right] \quad \frac{1}{\theta} < \frac{\alpha}{\beta} \;\text{ et }\; \frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}{1-\frac{1}{\theta}} < \frac{1}{p}.$$

• Fixons $\beta \in \left]\dfrac{1}{\gamma},\ \beta_0\right]$.
Nous avons $0 < \dfrac{1}{\beta} < \gamma < \dfrac{1}{\alpha} \leq 1$ et donc, d'après les inégalités (II.1.4) et (II.1.8), il existe une constante réelle $C > 0$ telle que telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad I_\gamma\mu(x) \leq C[m_\beta\mu(x)]^{\frac{\frac{1}{\alpha}-\gamma}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}}[m_\alpha\mu(x)]^{\frac{\gamma-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}}$$

et par suite

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad I_\gamma\mu(x) \leq C[m_\beta\mu(x)]^{\frac{\frac{1}{\alpha}-\gamma}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}}\|\mu\|_{T(\infty,\,\alpha)}^{\frac{\gamma-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}}.$$

Considérons un réel $\lambda > 0$. Nous avons, d'après ce qui précède

$$\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ I_\gamma\mu(x) > \lambda\right\}\right) \leq \nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_\beta\mu(x) > C^{-\frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha}-\gamma}}\|\mu\|_{T(\infty,\,\alpha)}^{-\frac{\gamma-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha}-\gamma}}\lambda^{\frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha}-\gamma}}\right\}\right)$$

et par suite d'après la proposition 2.1.8

$$\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ I_\gamma\mu(x) > \lambda\right\}\right) \leq 5^{d(1-\frac{1}{\theta})}\|\nu\|_{T(\infty,\,\theta)}C^q\|\mu\|_{T(\infty,\,\alpha)}^{q.\frac{1-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha}-\gamma}}\lambda^{-q}\|\mu\|_{T\left(\frac{1-\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}},\,\alpha\right)}^{\frac{1-\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}}$$

$$\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ I_\gamma\mu(x) > \lambda\right\}\right) \leq 5^{d(1-\frac{1}{\theta})}\|\nu\|_{T(\infty,\,\theta)}C^q\lambda^{-q}\|\mu\|^q_{T\left(\frac{1-\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}},\,\alpha\right)}$$

$$\begin{aligned}\lambda\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ I_\gamma\mu(x) > \lambda\right\}\right)^{\frac{1}{q}} &\leq 5^{d(\frac{1}{\alpha}-\gamma)}\|\nu\|_{T(\infty,\,\theta)}^{\frac{1}{q}}C\|\mu\|_{T\left(\frac{1-\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}},\,\alpha\right)} \\ &\leq 5^{d(\frac{1}{\alpha}-\gamma)}\|\nu\|_{T(\infty,\,\theta)}^{\frac{1}{q}}C\|\mu\|_{T(p,\,\alpha)}.\end{aligned}$$

□

En prenant dans la proposition précédente ν comme la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, puis $\alpha = p = 1$, nous obtenons ce qui suit

Corollaire 2.2.2. *1) Supposons que $0 < \gamma < \frac{1}{\alpha} \leq 1$ et $\frac{1}{\alpha} - \gamma = \frac{1}{q} < \frac{1}{p}$. Alors il existe une constante réelle $D > 0$ telle que, pour toute mesure de Radon positive μ sur $\mathbb{R}^d$, nous ayons*

$$\|I_\gamma\mu\|^*_{q,\,+\infty} \equiv \sup_{t>0} t|\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > t\}|^{\frac{1}{q}} \leq D\|\mu\|_{T(p,\,\alpha)} \tag{II.2.2}$$

2) Il existe une constante réelle $D > 0$ telle que,
a) pour toute mesure positive μ sur $\mathbb{R}^d$

$$\|I_\gamma\mu\|^*_{\frac{1}{1-\gamma},\,+\infty} \leq D\mu(\mathbb{R}^d) \tag{II.2.3}$$

b) pour tout élément f de $L^1(\mathbb{R}^d)$
• $C(d,\ \gamma)I_\gamma(f)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}|x-y|^{d(\gamma-1)}f(y)dy$ *converge pour Lebesgue presque tout point x de $\mathbb{R}^d$*

• $\|I_\gamma(f)\|^*_{\frac{1}{1-\gamma},\,+\infty} \leq D\|f\|_1.$

(II.2.4)

Démonstration. 1) Il suffit de remarquer que si ν est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ alors $\|\nu\|_{T(+\infty,\, +\infty)} = 1$.
2) a) Il suffit d'appliquer le point 1) en remarquant que, pour toute mesure de Radon positive ν sur $\mathbb{R}^d$, $\|\mu\|_{T(1,\, 1)} = \mu(\mathbb{R}^d)$.
b) Considérons un élément f de $L^1(\mathbb{R}^d)$ et la mesure μ_f de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Il est clair que μ_f est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$ telle que

$$I_\gamma(|f|) = I_\gamma(\mu_{|f|}) \text{ et } \mu_{|f|}(\mathbb{R}^d) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx = \|f\|_1 < +\infty.$$

Par conséquent nous avons, d'après ce qui précède

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad |\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ I_\gamma(|f|)(x) > t\}| \leq \left[t^{-1}\|I_\gamma(|f|)\|^*_{\frac{1}{1-\gamma},\infty}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq \left[t^{-1}D\|f\|_1\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} < +\infty.$$

Ainsi, pour presque tout point x de $\mathbb{R}^d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{d(\gamma-1)}|f(y)|dy = C(d,\ \gamma)I_\gamma(|f|)(x) < +\infty$$

et par suite, $\int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{d(\gamma-1)} f(y)dy = C(d,\ \gamma)I_\gamma(f)(x)$ converge et vérifie $|I_\gamma(f)(x)| \leq I_\gamma(|f|)(x)$.
Par conséquent, nous avons

$$\|I_\gamma(f)\|^*_{\frac{1}{1-\gamma},\,+\infty} \leq \|I_\gamma(|f|)\|^*_{\frac{1}{1-\gamma},\,+\infty} \leq D\|f\|_1.$$

□

Les résultats obtenus ci-dessus peuvent être améliorés en utilisant ce qui suit

Définition 2.2.3. *Posons :*
- $\forall k \in \mathbb{Z} \quad \mathcal{D}_k = \left\{ \prod_{j=1}^{d} \left[2^{-k}m_j,\ 2^{-k}(m_j+1)\right[\ : \ m \in \mathbb{Z}^d \right\}$
- $\mathcal{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_k$.

Pour chaque entier k, les éléments de $\mathcal{D}_k$ sont appelés les cubes dyadiques de $\mathbb{R}^d$ de génération k. $\mathcal{D}$ est l'ensemble des cubes dyadiques de $\mathbb{R}^d$.

Proposition 2.2.4 (Lemme de recouvrement de Whitney). *Supposons que F est un sous-ensemble non vide et fermé de $\mathbb{R}^d$ et $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus F$. Alors il existe une famille $\{Q_i \ : \ i \in I\ \}$ de cubes dyadiques vérifiant :*
(i) $\Omega = \bigcup_{i\in I} Q_i$
(ii) $\forall i,\ j \in I \quad i \neq j \Longrightarrow Q_i \cap Q_j = \emptyset$
(iii) $\forall i \in I \quad diam(Q_i) \leq dist(Q_i,\ F) \leq 4diam(Q_i)$.

Démonstration. Remarquons que :
- $\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall Q \in \mathcal{D}_n \ \ diam(Q) = 2^{-n}\sqrt{d}$.
- $\forall (Q_1,\ Q_2) \in \mathcal{D}_{n_1} \times \mathcal{D}_{n_2} \ \ n_1 \geq n_2$ et $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset \Longrightarrow Q_1 \subset Q_2$.

Posons :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ c2^{-n} < dist(x,\ F) \leq c2^{-n+1}\}$$

où c est un élément de $]\sqrt{d},\ +\infty[$ à fixer plus tard.
Remarquons que $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \Omega_n$. Posons

$$\mathcal{F}_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{Q \in \mathcal{D}_n \ :\ Q \cap \Omega_n \neq \emptyset\right\}.$$

$(\star)$ Remarquons que $\Omega = \bigcup\limits_{Q\in\mathcal{F}_0} Q$. En effet

$$\begin{array}{rcl} x \in Q \in \mathcal{F}_0 & \Longrightarrow & \exists n \in \mathbb{Z}\ :\ Q \in \mathcal{D}_n,\ \ Q \cap \Omega_n \neq \emptyset \ \text{ et }\ x \in Q \\ & \Longrightarrow & x \in Q,\ diam(Q) = 2^{-n}\sqrt{d},\ \ \exists y \in Q \,\text{avec}\, 2^{-n}c < dist(y,\ F) \leq 2^{-n+1}c \\ & \Longrightarrow & dist(x,\ F) \geq dist(y,\ F) - diam(Q) > 2^{-n}c - 2^{-n}\sqrt{d} > 0 \\ & \Longrightarrow & x \in \Omega \\ & \Longrightarrow & \exists n \in \mathbb{Z}\ :\ x \in \Omega_n = \Omega_n \cap \left(\bigcup\limits_{Q\in\mathcal{D}_n} Q\right) \\ & \Longrightarrow & \exists n \in \mathbb{Z},\ \exists Q \in \mathcal{D}_n\ :\ x \in Q \\ & \Longrightarrow & x \in Q \in \mathcal{F}_0. \end{array}$$

$(\star\star)$ Soit Q un élément de $\mathcal{F}_0$.
$\exists n \in \mathbb{Z} : Q \in \mathcal{D}_n$ et $Q \cap \Omega_n \neq \emptyset$.
Considérons un point x de $Q \cap \Omega_n$. Alors

$$\begin{array}{rcl} 2^{-n+1}c & \geq & dist(x,\ F) \geq dist(Q,\ F) \geq dist(x,\ F) - diam(Q) \\ & > & c2^{-n} - 2^{-n}\sqrt{d} = 2^{-n}(c - \sqrt{d}). \end{array}$$

En prenant $c = 2\sqrt{d}$ nous obtenons

$$diam(Q) = 2^{-n}\sqrt{d} < dist(Q,\ F) \leq 2^{-n+1}2\sqrt{2} = 42^{-n}\sqrt{d} = 4\,diam(Q).$$

$(\star\star\star)$ Soit Q un élément de de $\mathcal{F}_0$.

$$\forall Q' \in \mathcal{F}_0\ \ Q \subset Q' \Longrightarrow diam(Q') \leq dist(Q',\ F) \leq dist(Q,\ F) \leq 4\,diam(Q).$$

Ainsi, l'ensemble $\{Q' \in \mathcal{F}_0\ :\ Q \subset Q'\}$ a un élément maximal.
Posons $\mathcal{F} = \{Q' \in \mathcal{F}_0\ :\ Q$ maximal pour $\subset\}$.
Il est clair que $\mathcal{F}$ vérifie (i), (ii), (iii). $\square$

Proposition 2.2.5. *Considérons une mesure de Radon positive μ sur $\mathbb{R}^d$ et un nombre réel $t > 0$ tel que*

$$\Omega_t = \left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > t\right\} \neq \mathbb{R}^d.$$

Alors il existe une famille $\{Q_i\ :\ i \in I\}$ de cubes dyadiques vérifiant :
(i) $\Omega_t = \bigcup\limits_{i\in I} Q_i$
(ii) $\forall i,\ j \in I\ \ i \neq j \Longrightarrow Q_i \cap Q_j = \emptyset$
(iii) il existe deux nombres réels $a > 1$ et $b > 0$, indépendants de μ et t, tels que pour tout élément $(\varepsilon,\ i)$ de $]0,\ 1] \times I$ on a

$$|\{x \in Q_i\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > at\}| \leq b\varepsilon^{\frac{1}{1-\gamma}}|Q_i| \text{ ou } Q_i \subset \left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_{\frac{1}{\gamma}}\mu(x) > \varepsilon t\right\}.$$

Démonstration. D'après le lemme de Fatou, $I_\gamma(\mu) = C(d,\ \gamma)^{-1}k_\gamma * \mu$ est semi-continue inférieurement et donc Ω_t est ouvert dans $\mathbb{R}^d$. Par suite, D'après le lemme de recouvrement de Withney, il existe une fammille $\{Q_i\ :\ i \in I\}$ de cubes dyadiques vérifiant les conditions (i) et (ii) et telle que :

$$\forall i \in I\ \ diam(Q_i) \leq dist(Q_i,\ \mathbb{R}^d \setminus \Omega_t) \leq 4\,diam(Q_i).$$

b) Considérons un élément Q de $\{Q_i\ :\ i \in I\}$.
Notons B la boule ouverte de même centre que Q et de rayon égal à $6\,diam(Q)$, μ_1 la restriction de μ à B et $\mu_2 = \mu - \mu_1$.
(α) Notons x_Q le centre de Q et P_Q le projecteur de meilleur approximation de $\mathbb{R}^d$ sur $\overline{Q}$.
Pour tout point x_1 de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $d(x,\ Q) \leq 4\,diam(Q)$, nous avons
$\forall(x,\ y) \in Q \times (\mathbb{R}^d \setminus B)$

$$\left\{\begin{array}{rcl} |x_1 - y| & \leq & |x_1 - P_Q(x_1)| + |P_Q(x_1) - x| + |x - y| \leq 5\,diam(Q) + |x-y| \\ |x - y| & \geq & |y - x_Q| - |x - x_Q| \geq 5\ diam(Q) \end{array}\right.$$

$$\forall(x,\ y) \in Q \times (\mathbb{R}^d \setminus B)\ \ |x_1 - y| \leq 2|x-y|\ \text{ et donc }\ |x-y|^{d(\gamma-1)} \leq 2^{d(1-\gamma)}|x_1 - y|^{d(\gamma-1)}.$$

$$\forall x \in Q \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{d(\gamma-1)} d\mu_2(y) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B} |x-y|^{d(\gamma-1)} d\mu(y) \leq 2^{d(1-\gamma)} \int_{\mathbb{R}^d\setminus B} |x_1 - y|^{d(\gamma-1)} d\mu(y)$$

$$\forall x \in Q \quad I_\gamma(\mu_2)(x) \leq 2^{d(1-\gamma)} I_\gamma(\mu)(x_1).$$

Comme $dist(Q,\ \mathbb{R}^d \setminus \Omega_t) \leq 4\ diam(Q)$, il existe un point x_1 de $\mathbb{R}^d \setminus \Omega_t$ tel que $dist(x_1,\ Q) \leq 4\ diam(Q)$ et par suite

$$\forall x \in Q,\ \ I_\Omega(\mu_2)(x) \leq 2^{d(1-\gamma)}t.$$

Choisissons un nombre réel $a \geq 2\,2^{d(1-\gamma)}$. Nous avons

$$\forall x \in Q \quad I_\gamma(\mu_2)(x) \leq \frac{at}{2}\ \text{ et donc }\ I_\gamma(\mu)(x) \leq I_\gamma(\mu_1)(x) + \frac{at}{2}.$$

Par conséquent

$$\{x \in Q\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > at\} \subset \left\{x \in Q\ :\ I_\gamma(\mu_1)(x) > \frac{at}{2}\right\}$$

et donc

$$|\{x \in Q\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > at\}| \leq \left|\left\{x \in Q\ :\ I_\gamma(\mu_1)(x) > \frac{at}{2}\right\}\right|$$

(β) Considérons un élément ε de $]0,\ 1]$.
Supposons que Q possède un élément x_0 vérifiant $m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu)(x_0) \leq \varepsilon t$.
D'apprès le corollaire II.2.2, il existe un nombre réel $A > 0$ dépendant uniquement de d et γ tel que

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ I_\gamma(\mu_1)(x) > \frac{at}{2}\right\}\right| \leq A\left[\frac{1}{at}\mu_1(\mathbb{R}^d)\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Notons B_0 la boule ouverte de centre x_0 et de rayon égal à $8\,diam(Q)$. Remarquons que B est incluse dans B_0. Donc

$$\mu_1(\mathbb{R}^d) = \int_B d\mu(x) \leq \int_{B_0} d\mu(x) \leq m^s_{\frac{1}{\gamma}}\mu(x_0)|B_0|^{1-\gamma}$$

et par suite, d'après l'inégalité (II.1.8) et le choix de a,

$$\begin{aligned}\mu_1(\mathbb{R}^d) &\leq \left(\frac{2^d}{\omega_d}\right)^{1-\gamma} m_{\frac{1}{\gamma}}\mu(x_0)|B_0|^{1-\gamma} \leq \left(\frac{2^d}{\omega_d}\right)^{1-\gamma} \varepsilon t|B_0|^{1-\gamma} \\ &= 2^{d(1-\gamma)}\varepsilon t\left(8\sqrt{d}\right)^{d(1-\gamma)}|Q|^{1-\gamma} \leq \frac{a\varepsilon t}{2}|Q|^{1-\gamma}\left(8\sqrt{d}\right)^{d(1-\gamma)}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ I_\gamma(\mu_1)(x) > \frac{at}{2}\right\}\right| \leq A\left[\frac{1}{at}.\frac{a\varepsilon t}{2}\left(8\sqrt{d}\right)^{d(1-\gamma)}|Q|^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} = b\varepsilon^{\frac{1}{1-\gamma}}|Q|$$

avec $b = A2^{-\frac{1}{1-\gamma}}(8\sqrt{d})^d$.
Ainsi, d'après l'inégalité obtenue au point (α), nous avons

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ I_\gamma(\mu_1)(x) > \frac{at}{2}\right\}\right| \leq b\varepsilon^{\frac{1}{1-\gamma}}|Q|.$$

□

Définition 2.2.6. *Nous dirons qu'une mesure de Radon ν sur $\mathbb{R}^d$ satisfait à la condition (A) lorsque pour tout nombre réel $\delta > 0$, il existe un nombre réel ρ tel que, si Q est un cube de $\mathbb{R}^d$ et E est un sous-ensemble de Borel de Q vérifiant $|E| < \rho|Q|$ alors $\nu(E) \leq \delta\nu(Q)$.*

La condition (A) est liée à la condition (A_∞) de Muckenhoupt (voir le lemme 8.0.6 de [7]).

Proposition 2.2.7. *Supposons que : $0 < \gamma < \frac{1}{\alpha} \leq 1$, $0 \leq \frac{1}{\theta} < 1$, $\frac{1}{p} = \frac{\frac{1}{\alpha}-\gamma}{1-\frac{1}{\theta}}$ et ν est une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d$ appartenant à $T(\infty,\ \theta)$ et satisfaisant à la condition (A).*
Alors, pour toute mesure de Radon positive μ sur $\mathbb{R}^d$ nous avons

$$_\nu\|I_\gamma(\mu)\|^*_{p,\ +\infty} \leq C_\nu\|m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu)\|^*_{p,\ +\infty} \tag{II.2.5}$$

où C est un nombre réel indépendant de μ.

Démonstration. Considérons une mesure de Radon positive μ sur $\mathbb{R}^d$.
<u>1er cas</u> : Supposons que le support de μ est borné : il existe un nombre réel $R > 0$ tel que la boule $B = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |x| \leq R\}$ contienne le support de μ.
a) Considérons un nombre réel $t > 0$ et $\Omega_t = \left\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ I_\gamma(\mu)(x) > t\right\}$.
Remarquons que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus B \quad \forall y \in B \quad |x-y| \geq |x| - R$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus B \ \ I_\gamma(\mu)(x) \leq C(d,\ \gamma)^{-1}(|x|-R)^{d(\gamma-1)}\mu(\mathbb{R}^d)$$

$$\forall x \in (\mathbb{R}^d \setminus B) \cap \Omega_t \quad |x| < R + \left[t^{-1}C(d,\ \gamma)^{-1}\mu(\mathbb{R}^d)\right]^{\frac{1}{d(1-\gamma)}}$$

$$\Omega_t \subset B\left(0,\ R + \left[t^{-1}C(d,\ \gamma)^{-1}\mu(\mathbb{R}^d)\right]^{\frac{1}{d(1-\gamma)}}\right).$$

Par conséquent, d'après la proposition 2.2.4, il existe une famille $\{Q_i \ : \ i \in I\}$ de cubes dyadiques de $\mathbb{R}^d$ vérifiant
(i) $\Omega_t = \bigcup_{i \in I} Q_i$
(ii) $\forall i,\ j \in I \quad i \neq j \Longrightarrow Q_i \cap Q_j = \emptyset$

(iii) il existe deux nombres réels $a > 1$ et $b > 0$ indépendants de μ et t tels que pour tout élément $(\varepsilon,\ i)$ de $]0,\ 1] \times I$

$$|\{x \in Q_i\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > at\}| \leq b\varepsilon^{\frac{1}{1-\gamma}} \text{ ou } Q_i \subset \left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu)(x) > \varepsilon t\right\}.$$

Considérons un élément δ de $]0,\ a^{-p}[$. Par hypothèse il existe un nombre $\rho > 0$ tel que, si Q est un cube de $\mathbb{R}^d$ et E un sous-ensemble borelien de Q vérifiant $|E| < \rho|Q|$ alors $\nu(E) \leq \delta\nu(Q)$.
Considérons un élément ε de $]0,\ \min(1,\ (b^{-1}\rho)^{1-\gamma})[$ et posons

$$I^\varepsilon = \left\{i \in I\ :\ Q_i \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu)(x) \leq \varepsilon t\right\} \neq \emptyset\right\}.$$

D'après la condition (iii) nous avons

$$\forall i \in I^\varepsilon \quad |\{x \in Q_i\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > at\}| \leq b\varepsilon^{\frac{1}{1-\gamma}}|Q_i|$$

et par suite, d'après le choix de ε,

$$\forall i \in I^\varepsilon \quad |\{x \in Q_i\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > at\}| < \rho|Q_i|.$$

Par conséquent, d'après la condition (A), nous avons

$$\forall i \in I^\varepsilon \quad \nu\left(\{x \in Q_i\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > at\}\right) \leq \delta\nu(Q_i).$$

En plus, comme $at > t$, nous avons

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > at\right\} \subset \Omega_t$$

et donc

$$\begin{aligned}
\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > at\right\} \quad &\subset \quad \left[\bigcup_{i \in I^\varepsilon} \{x \in Q_i\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > at\}\right] \cup \left[\bigcup_{i \in I \setminus I^\varepsilon} Q_i\right] \\
&\subset \quad \left[\bigcup_{i \in I^\varepsilon} \{x \in Q_i\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > at\}\right] \cup \left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu)(x) > \varepsilon t\right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned}
&\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > at\right\}\right) \\
\leq\ & \sum_{i \in I^\varepsilon} \nu\left(\{x \in Q_i\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > at\}\right) + \nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu)(x) > \varepsilon t\right\}\right) \\
\leq\ & \delta \sum_{i \in I^\varepsilon} \nu(Q_i) + \nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu)(x) > \varepsilon t\right\}\right) \\
\leq\ & \delta\nu(\Omega_t) + \nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu)(x) > \varepsilon t\right\}\right).
\end{aligned}$$

b) Supposons que $0 < \lambda < +\infty$. Compte tenu de ce qui précède nous avons

$$\sup_{0<t<\lambda} t^p\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > at\right\}\right) \leq \delta \sup_{0<t<\lambda} t^p\nu(\Omega_t) + \sup_{0<t<\lambda} t^p\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu)(x) > \varepsilon t\right\}\right)$$

$$a^{-p} \sup_{0<t<a\lambda} t^p\nu(\Omega_t) \leq \delta \sup_{0<t<\lambda} t^p\nu(\Omega_t) + \varepsilon^{-p} \sup_{0<t<\varepsilon\lambda} t^p\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu)(x) > t\right\}\right).$$

En plus, pour tout réel $t > 0$ nous avons

$$t^p\nu(\Omega_t) \leq t^p\nu\left(B\left(0,\ R + \left[t^{-1}C(d,\ \gamma)^{-1}\mu(\mathbb{R}^d)\right]^{\frac{1}{d(1-\gamma)}}\right)\right)$$

$$t^p\nu(\Omega_t) \leq t^p\left\{R + \left[t^{-1}C(d,\ \gamma)^{-1}\mu(\mathbb{R}^d)\right]^{\frac{1}{d(1-\gamma)}}\right\}^{d(1-\frac{1}{\theta})} 2^{d(1-\frac{1}{\theta})}\|\nu\|_{T(\infty,\,\theta)}$$

$$t^p\nu(\Omega_t) \leq \left\{Rt^{\frac{1}{d(\frac{1}{\alpha}-\gamma)}} + \left[C(d,\ \gamma)^{-1}\mu(\mathbb{R}^d)\right]^{\frac{1}{d(1-\gamma)}} t^{\frac{1}{d}\left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha}-\gamma}-\frac{1}{1-\gamma}\right)}\right\}^{d(1-\frac{1}{\theta})} 2^{d(1-\frac{1}{\theta})}\|\nu\|_{T(\infty,\,\theta)}$$

et par suite, compte tenu des hypothèses sur θ, γ, α et ν,

$$\sup_{0<t<\lambda} t^p\nu(\Omega_t) < +\infty.$$

Ainsi nous pouvons écrire

$$[a^{-p} - \delta]\sup_{0<t<a\lambda} t^p\nu(\Omega_t) \leq \varepsilon^{-p}\sup_{0<t<\varepsilon\lambda} t^p\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu)(x) > t\right\}\right).$$

En faisant tendre λ vers $+\infty$ nous obtenons

$$\sup_{t>0} t^p\nu(\Omega_t) \leq \varepsilon^{-p}[a^{-p} - \delta]^{-1}\sup_{t>0} t^p\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu)(x) > t\right\}\right).$$

Cas général Pour tout entier $n \geq 1$, nous pouvons appliquer le résultat obtenu dans le 1er cas à la restriction μ_n de μ à la boule $B_n = \{x \in \mathbb{R}^d\ :\ |x| \leq n\}$.
Ainsi nous avons pour tout entier $n \geq 1$

$$\sup_{t>0} t^p\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ I_\gamma(\mu_n)(x) > t\right\}\right) \leq \varepsilon^{-p}[a^{-p} - \delta]^{-1}\sup_{t>0} t^p\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu_n)(x) > t\right\}\right).$$

En remarquant que

$$\forall n \geq 1\ \ m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu_n) \leq m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu)\ \text{ et }\ \left(I_\gamma(\mu_n)\right)_{n\geq 1}\ \text{ converge en croissant vers } I_\gamma(\mu)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\sup_{t>0} t^p\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ I_\gamma(\mu)(x) > t\right\}\right) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sup_{t>0} t^p\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ I_\gamma(\mu_n)(x) > t\right\}\right)\\ &\leq \varepsilon^{-p}[a^{-p} - \delta]^{-1}\sup_{t>0} t^p\nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ m_{\frac{1}{\gamma}}(\mu)(x) > t\right\}\right).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.8. *Supposons que :* $0 < \gamma < \dfrac{1}{\alpha} \leq 1$, $0 \leq \dfrac{1}{\theta} \leq \gamma\alpha$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{1 - \frac{1}{\theta}}$ *et* ν *est une mesure de Radon positive sur* $\mathbb{R}^d$*, satisfaisant à la condition (A).*
Alors il existe une constante réelle $C > 0$ *telle que, pour toute mesure de Radon positive* μ *sur* $\mathbb{R}^d$*, nous ayons*

$$_\nu\|I_\gamma(\mu)\|^*_{p,\,\infty} \leq C\|\nu\|^{\frac{1}{p}}_{T(\infty,\,\theta)}\|\mu\|_{T(p,\,\alpha)}. \tag{II.2.6}$$

Démonstration. L'assertion est une conséquence immédiate de la proposition 2.1.8 et de la proposition 2.2.7. □

Comme cas particulier de la proposition précédente, nous avons ce qui suit

Corollaire 2.2.9. *Supposons que :* $0 < \gamma < \frac{1}{\alpha} \leq 1$, $0 \leq \frac{1}{\theta} \leq \gamma\alpha$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{1 - \frac{1}{\theta}}$ *et* ν *est une mesure de Radon positive sur* $\mathbb{R}^d$*, satisfaisant à la condition (A).*
Alors pour tout élément f *de* $F(1, p, \alpha)$.
• *l'intégrale* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{d(\gamma-1)} f(y)dy$ *converge pour* ν*-presque tout élément* x *de* $\mathbb{R}^d$.

$$\bullet \quad {}_{\nu}\|I_\gamma(f)\|^*_{p,\,\infty} \leq C\|\nu\|^{\frac{1}{p}}_{T(\infty,\,\theta)}\|f\|_{F(1,\,p,\,\alpha)} \leq C\|\nu\|^{\frac{1}{p}}_{T(\infty,\,\theta)}\|f\|_{\alpha} \qquad \text{(II.2.7)}$$

où C *est une constante réelle indépendante de* f.

Démonstration. Considérons un élément f de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.
• La mesure $\mu_{|f|}$ de densité $|f|$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ vérifie

$$I_\gamma(|f|) = I_\gamma(\mu_{|f|}) \ \text{ et } \ \|\mu_{|f|}\|_{T(p,\,\alpha)} = \|f\|_{F(1,\,p,\,\alpha)}.$$

Par conséquent, d'après la proposition 2.2.8 nous avons

$${}_{\nu}\|I_\gamma(|f|)\|^*_{p,\,+\infty} \leq C\|\nu\|^{\frac{1}{p}}_{T(\infty,\,\theta)}\|f\|_{F(1,\,p,\,\alpha)}$$

où C est une constante réelle indépendante de f.
• Supposons que f appartient à $F(1, p, \alpha)$.
D'après ce qui précède, nous avons

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^*_+ \ \ \nu\left(\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ I_\gamma(\mu)(x) > t\}\right) &\leq \left[t^{-1}{}_{\nu}\|I_\gamma(|f|)\|^*_{p,\,+\infty}\right]^p \\ &\leq \left[t^{-1}C\|\nu\|^{\frac{1}{p}}_{T(\infty,\,\theta)}\|f\|_{F(1,\,p,\,\alpha)}\right]^p < +\infty.\end{aligned}$$

Ainsi, pour ν presque tout point x de $\mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{d(\gamma-1)}|f(y)|dy = C(d,\ \gamma)I_\gamma(|f|)(x) < +\infty$$

et par suite $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{d(\gamma-1)}|f(y)|dy = C(d,\ \gamma)I_\gamma(|f|)(x)$ converge et $|I_\gamma(f)(x)| \leq I_\gamma(|f|)(x)$.
Par conséquent nous avons

$$\|I_\gamma(f)\|^*_{p,\,+\infty} \leq \|I_\gamma(|f|)\|^*_{p,\,+\infty} \leq C\|\nu\|^{\frac{1}{p}}_{T(\infty,\,\theta)}\|f\|_{F(1,\,p,\,\alpha)}.$$

La dernière inégalité découle du point 2) b) de la remarque 2.1.6 □

A partir du corollaire précédent nous pouvons obtenir des inégalités en norme de Lebesgue sur l'intégrale fractionnaire, grâce au théorème d'interpolation de Marcinckiewicz énoncé ci-dessous.

Proposition 2.2.10 ([2]). *Supposons que*
• α_0, α_1, p_0, p_1 *sont des éléments de* $[1, +\infty]$ *et* $\alpha_0 \neq \alpha_1$.
• (U, ω) *et* (V, ν) *sont deux espaces mesurés*
• T *est une application linéaire continue de*
- $L^{\alpha_0}(U, \omega)$ *dans* $L^{p_0,\,\infty}(V, \nu)$ *de norme* M_0
- $L^{\alpha_1}(U, \omega)$ *dans* $L^{p_1,\,+\infty}(V, \nu)$ *de norme* M_1
• $0 < s < 1$, $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1-s}{\alpha_0} + \dfrac{s}{\alpha_1}$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-s}{p_0} + \dfrac{s}{p_1}$ *et* $\alpha \leq p$.
Alors la restriction de T *à* $L^{\alpha_0}(U, \omega) \cap L^{\alpha_1}(U, \omega)$ *se prolonge par continuité en une application linéaire continue de* $L^p(U, \omega)$ *dans* $L^p(V, \nu)$ *de norme* $M \leq C_s M_0^{1-s} M_1^s$*, où* C_s *est un nombre réel dépendant uniquement de* s.

Proposition 2.2.11 (Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev pour l'intégrale fractionnaire).
Supposons que : $0 < \gamma < \dfrac{1}{\alpha} < 1$, $0 \leq \dfrac{1}{\theta} < \gamma\alpha$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\frac{1}{\alpha} - \gamma}{1 - \frac{1}{\theta}}$ *et* ν *est une mesure de Radon positive sur* $\mathbb{R}^d$*, satisfaisant à la condition (A).*
Alors il existe une constante réelle $C > 0$ *telle que, pour tout élément* f *de* $L^\alpha(\mathbb{R}^d)$*,*

$$_\nu\|I_\gamma(f)\|_p \leq C\|\nu\|_{T(\infty,\, \theta)}^{\frac{1}{p}}\|f\|_\alpha$$

Démonstration. Considérons α_0 et α_1 tels que $\gamma < \dfrac{1}{\alpha_0} < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{\alpha_1} \leq 1$ et $\dfrac{1}{\theta} \leq \gamma\alpha_1$. Posons $\dfrac{1}{p_i} = \dfrac{\frac{1}{\alpha_i} - \gamma}{1 - \frac{1}{\theta}}$ pour $i = 0,\ 1$.
Remarquons que pour $i = 0,\ 1$, nous avons $\gamma < \dfrac{1}{\alpha_i} \leq 1$ et $\dfrac{1}{\theta} \leq \gamma\alpha_i$. Par conséquent, d'après le corollaire 2.2.9, I_γ est une application linéaire continue de $L^{\alpha_i}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^{p_i,\, +\infty}(\mathbb{R}^d,\ \nu)$ de norme $M_i \leq C_i\|\nu\|_{T(\infty,\, \theta)}^{\frac{1}{p_i}}$ où C_i est une constante réelle.
Par ailleurs, nous avons $\dfrac{1}{\alpha_0} < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{\alpha_1}$ et donc il existe un élément s de $]0,\ 1[$ vérifiant $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1-s}{\alpha_0} + \dfrac{s}{\alpha_1}$. Remarquons que $\dfrac{1-s}{p_0} + \dfrac{s}{p_1} = \dfrac{1}{p} \leq \dfrac{1}{\alpha}$. Par conséquent, d'après le théorème d'interpolation de Marcinckiewicz, il existe un nombre réel C_s tel que

$$\forall f \in L^\alpha(\mathbb{R}^d) \quad _\nu\|I_\gamma(f)\|_p \leq C_s\, C_0^{1-s} C_1^s \|\nu\|_{T(\infty,\, \theta)}^{\frac{1}{p}}\|f\|_\alpha.$$

□

Bibliographie

[1] ADAMS D. R. and HEDBERG L. I., *Function spaces and potential theory*, Corrected Second Printing, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1999.

[2] BERGH J. and LÖFSTRÖM J., *Interpolation Spaces : An introduction*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg and New york 1976.

[3] DONOGHUE W. F., *Distributions and Fourier transforms*, Academic Press, New York and London 1976.

[4] FOFANA I. , FALEA F. R. and KPATA B. A., *A class of subspaces of Morrey spaces and norm inequalities on Riesz potential operators*, to appear in Afrika Matematika.

[5] FOLLAND G. B, *Real Analysis Modern Techniques and their applications*, Second Edition, John Wiley and sons, Inc New York 1999.

[6] GRAFAKOS L., *Classical Fourier Analysis*, Second Edition, Springer 2008.

[7] PEREZ C., *Calderon Zygmund Theory related to Poincaré-Sobolev inequalities, fractional integrals and singular integral operators*, Neuquén UMA 2004.

[8] STEIN E. M. and WEISS G., *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press 1971.