

Estimation des processus localement stationnaires par la distance minimale de Hellinger

S. Fofana¹, A. Diop², O. Hili³

¹Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (ENSAE), Sénégal

²Université Gaston Berger (UGB), Saint-Louis, Sénégal

³Institut National Polytechnique Félix Houphouët-Boigny (INPHB),

Yamoussoukro, Côte d'Ivoire

CIMPA, Abidjan 2014

Abidjan, 27 Mars 2014

Plan

- 1 Introduction
- 2 Processus localement stationnaires
- 3 Estimation de la densité spectrale
- 4 Estimateur du minimum de distance de Hellinger sous la stationnarité locale
 - Définition de l'estimateur
 - Propriétés asymptotiques de l'estimateur
- 5 Simulations

Introduction

- 1 La stationnarité constitue l'hypothèse de base : Identification, Estimation et Prédiction.
- 2 Comportement non stationnaire des processus, Stărică et Granger (2005).
- 3 Hypothèse : $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$ T observations issues d'un processus localement stationnaire $(X_{t,T})$ avec une densité spectrale f variant au cours du temps et appartenant à une famille paramétrique de densités spectrales $\mathcal{F} = \{f_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$.
- 4 L'objectif est d'estimer le paramètre d'intérêt θ .
- 5 Estimation de θ par Hosoya (1974) et Taniguchi (1979) en minimisant $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\log f_\theta(\lambda) + I_T(\lambda) / f_\theta(\lambda) \right) d\lambda$.

Introduction

- 1 La stationnarité constitue l'hypothèse de base : Identification, Estimation et Prédiction.
- 2 Comportement non stationnaire des processus, Stărică et Granger (2005).
- 3 Hypothèse : $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$ T observations issues d'un processus localement stationnaire $(X_{t,T})$ avec une densité spectrale f variant au cours du temps et appartenant à une famille paramétrique de densités spectrales $\mathcal{F} = \{f_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$.
- 4 L'objectif est d'estimer le paramètre d'intérêt θ .
- 5 Estimation de θ par Hosoya (1974) et Taniguchi (1979) en minimisant $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\log f_\theta(\lambda) + I_T(\lambda) / f_\theta(\lambda) \right) d\lambda$.

Introduction

- 1 La stationnarité constitue l'hypothèse de base : Identification, Estimation et Prédiction.
- 2 Comportement non stationnaire des processus, Stărică et Granger (2005).
- 3 Hypothèse : $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$ T observations issues d'un processus localement stationnaire $(X_{t,T})$ avec une densité spectrale f variant au cours du temps et appartenant à une famille paramétrique de densités spectrales $\mathcal{F} = \{f_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$.
- 4 L'objectif est d'estimer le paramètre d'intérêt θ .
- 5 Estimation de θ par Hosoya (1974) et Taniguchi (1979) en minimisant $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\log f_\theta(\lambda) + I_T(\lambda) / f_\theta(\lambda) \right) d\lambda$.

Introduction

- 1 La stationnarité constitue l'hypothèse de base : Identification, Estimation et Prédiction.
- 2 Comportement non stationnaire des processus, Stărică et Granger (2005).
- 3 Hypothèse : $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$ T observations issues d'un processus localement stationnaire $(X_{t,T})$ avec une densité spectrale f variant au cours du temps et appartenant à une famille paramétrique de densités spectrales $\mathcal{F} = \{f_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$.
- 4 L'objectif est d'estimer le paramètre d'intérêt θ .
- 5 Estimation de θ par Hosoya (1974) et Taniguchi (1979) en minimisant $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\log f_\theta(\lambda) + I_T(\lambda) / f_\theta(\lambda) \right) d\lambda$.

Introduction

- 1 La stationnarité constitue l'hypothèse de base : Identification, Estimation et Prédiction.
- 2 Comportement non stationnaire des processus, Stărică et Granger (2005).
- 3 Hypothèse : $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$ T observations issues d'un processus localement stationnaire $(X_{t,T})$ avec une densité spectrale f variant au cours du temps et appartenant à une famille paramétrique de densités spectrales $\mathcal{F} = \{f_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$.
- 4 L'objectif est d'estimer le paramètre d'intérêt θ .
- 5 Estimation de θ par Hosoya (1974) et Taniguchi (1979) en minimisant $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\log f_\theta(\lambda) + I_T(\lambda) / f_\theta(\lambda) \right) d\lambda$.

Introduction

- 1 Estimation de θ par Dahlhaus (1997) en minimisant

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \left(\log f_{\theta}(u_j, \lambda) + I_T(u_j, \lambda) / f_{\theta}(u_j, \lambda) \right) d\lambda.$$

- 2 Le problème d'estimation du paramètre
 - cas temporel basé sur les distributions de probabilité.
 - cas spectral avec des processus non stationnaires, un cas rarement étudié, bien qu'il soit très important pour plusieurs applications (économie, finance,...).
- 3 Les premiers résultats théoriques sont dûs, d'une part à Dahlhaus (1997) et d'autre part à Ludeña (2000).
- 4 L'objectif de ce travail est de proposer un estimateur robuste et applicable pour les processus localement stationnaires.
- 5 Méthode d'estimation par le Minimum de Distance de Hellinger (MDH)

Introduction

- 1 Estimation de θ par Dahlhaus (1997) en minimisant

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \left(\log f_{\theta}(u_j, \lambda) + I_T(u_j, \lambda) / f_{\theta}(u_j, \lambda) \right) d\lambda.$$

- 2 Le problème d'estimation du paramètre
- cas temporel basé sur les distributions de probabilité.
 - cas spectral avec des processus non stationnaires, un cas rarement étudié, bien qu'il soit très important pour plusieurs applications (économie, finance,...).
- 3 Les premiers résultats théoriques sont dûs, d'une part à Dahlhaus (1997) et d'autre part à Ludeña (2000).
- 4 L'objectif de ce travail est de proposer un estimateur robuste et applicable pour les processus localement stationnaires.
- 5 Méthode d'estimation par le Minimum de Distance de Hellinger (MDH)

Introduction

- 1 Estimation de θ par Dahlhaus (1997) en minimisant

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \left(\log f_{\theta}(u_j, \lambda) + I_T(u_j, \lambda) / f_{\theta}(u_j, \lambda) \right) d\lambda.$$

- 2 Le problème d'estimation du paramètre
- cas temporel basé sur les distributions de probabilité.
 - cas spectral avec des processus non stationnaires, un cas rarement étudié, bien qu'il soit très important pour plusieurs applications (économie, finance,...).
- 3 Les premiers résultats théoriques sont dûs, d'une part à Dahlhaus (1997) et d'autre part à Ludeña (2000).
- 4 L'objectif de ce travail est de proposer un estimateur robuste et applicable pour les processus localement stationnaires.
- 5 Méthode d'estimation par le Minimum de Distance de Hellinger (MDH)

Introduction

- 1 Estimation de θ par Dahlhaus (1997) en minimisant

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \left(\log f_{\theta}(u_j, \lambda) + I_T(u_j, \lambda) / f_{\theta}(u_j, \lambda) \right) d\lambda.$$

- 2 Le problème d'estimation du paramètre
 - cas temporel basé sur les distributions de probabilité.
 - cas spectral avec des processus non stationnaires, un cas rarement étudié, bien qu'il soit très important pour plusieurs applications (économie, finance,...).
- 3 Les premiers résultats théoriques sont dûs, d'une part à Dahlhaus (1997) et d'autre part à Ludeña (2000).
- 4 L'objectif de ce travail est de proposer un estimateur robuste et applicable pour les processus localement stationnaires.
- 5 Méthode d'estimation par le Minimum de Distance de Hellinger (MDH)

Introduction

- 1 Estimation de θ par Dahlhaus (1997) en minimisant

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \left(\log f_{\theta}(u_j, \lambda) + I_T(u_j, \lambda) / f_{\theta}(u_j, \lambda) \right) d\lambda.$$

- 2 Le problème d'estimation du paramètre
- cas temporel basé sur les distributions de probabilité.
 - cas spectral avec des processus non stationnaires, un cas rarement étudié, bien qu'il soit très important pour plusieurs applications (économie, finance,...).
- 3 Les premiers résultats théoriques sont dûs, d'une part à Dahlhaus (1997) et d'autre part à Ludeña (2000).
- 4 L'objectif de ce travail est de proposer un estimateur robuste et applicable pour les processus localement stationnaires.
- 5 Méthode d'estimation par le Minimum de Distance de Hellinger (MDH)

Introduction

- 1 Estimation de θ par Dahlhaus (1997) en minimisant

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \left(\log f_{\theta}(u_j, \lambda) + I_T(u_j, \lambda) / f_{\theta}(u_j, \lambda) \right) d\lambda.$$

- 2 Le problème d'estimation du paramètre
 - cas temporel basé sur les distributions de probabilité.
 - cas spectral avec des processus non stationnaires, un cas rarement étudié, bien qu'il soit très important pour plusieurs applications (économie, finance,...).
- 3 Les premiers résultats théoriques sont dûs, d'une part à Dahlhaus (1997) et d'autre part à Ludeña (2000).
- 4 L'objectif de ce travail est de proposer un estimateur robuste et applicable pour les processus localement stationnaires.
- 5 Méthode d'estimation par le Minimum de Distance de Hellinger (MDH)

Introduction

Nous présentons ici des données non stationnaires : le SP 500. Dans plusieurs applications, cette série est d'abord stationnarisée avant d'être étudiée. Dans notre étude, pour ne pas perdre certaines informations nous proposons d'estimer localement cette série.



Introduction : L'estimateur du minimum de distance de Hellinger

- L'EMDH, que nous notons ici $\hat{\theta}_T^{DH}$, est la valeur du paramètre θ qui minimise la distance de Hellinger entre un estimateur non paramétrique \hat{f}_T et f_θ une densité spectrale appartenant à la famille paramétrique spectrale \mathcal{F} .

$$\hat{\theta}_T^{DH} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \|f_\theta^{\frac{1}{2}} - \hat{f}_T^{\frac{1}{2}}\|_2 \quad (1)$$

$$\|f_\theta - \hat{f}_T\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f_\theta(\lambda) - \hat{f}_T(\lambda)]^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{est la norme usuelle } L_2. \quad (2)$$

$\hat{\theta}_T^{DH}$ est la valeur de θ qui minimise la distance de Hellinger $d_H(f_\theta, \hat{f}_T)$

Introduction : L'estimateur du minimum de distance de Hellinger

- L'EMDH, que nous notons ici $\hat{\theta}_T^{DH}$, est la valeur du paramètre θ qui minimise la distance de Hellinger entre un estimateur non paramétrique \hat{f}_T et f_θ une densité spectrale appartenant à la famille paramétrique spectrale \mathcal{F} .

$$\hat{\theta}_T^{DH} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{arg\,min}} \|f_\theta^{\frac{1}{2}} - \hat{f}_T^{\frac{1}{2}}\|_2 \quad (1)$$

$$\|f_\theta - \hat{f}_T\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f_\theta(\lambda) - \hat{f}_T(\lambda)]^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{est la norme usuelle } L_2. \quad (2)$$

$\hat{\theta}_T^{DH}$ est la valeur de θ qui minimise la distance de Hellinger $d_H(f_\theta, \hat{f}_T)$

Définition

- $X_{t,T}$ est dit localement stationnaire si

$$X_{t,T} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{t,T}(j) \varepsilon_{t-j}, \quad (3)$$

où les ε_t sont des v.a i.i.d avec $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$, $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = 1$ et $\mathbb{E}\varepsilon_t^4 < \infty$. Les coefficients $\alpha_{t,T}(j)$ variant au cours du temps satisfont les conditions suivantes :

- \mathbf{H}_1 : il existe une suite $\{\ell(j), j \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|j|}{\ell(j)} < \infty$$

et telle que

$$\sup_t |\alpha_{t,T}(j)| \leq \frac{K}{\ell(j)}.$$

Définition

- $X_{t,T}$ est dit localement stationnaire si

$$X_{t,T} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{t,T}(j) \varepsilon_{t-j}, \quad (3)$$

où les ε_t sont des v.a i.i.d avec $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$, $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = 1$ et $\mathbb{E}\varepsilon_t^4 < \infty$. Les coefficients $\alpha_{t,T}(j)$ variant au cours du temps satisfont les conditions suivantes :

- H_1 : il existe une suite $\{\ell(j), j \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|j|}{\ell(j)} < \infty$$

et telle que

$$\sup_t |\alpha_{t,T}(j)| \leq \frac{K}{\ell(j)}.$$

Définition

- $X_{t,T}$ est dit localement stationnaire si

$$X_{t,T} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{t,T}(j) \varepsilon_{t-j}, \quad (3)$$

où les ε_t sont des v.a i.i.d avec $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$, $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = 1$ et $\mathbb{E}\varepsilon_t^4 < \infty$. Les coefficients $\alpha_{t,T}(j)$ variant au cours du temps satisfont les conditions suivantes :

- \mathbf{H}_1 : il existe une suite $\{\ell(j), j \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|j|}{\ell(j)} < \infty$$

et telle que

$$\sup_t |\alpha_{t,T}(j)| \leq \frac{K}{\ell(j)}.$$

Définition

- **H₂** : il existe une fonction $\alpha(\cdot, j) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\sup_u |\alpha(u, j)| \leq \frac{K}{\ell(j)},$$

$$\sup_{u, v} |\alpha(u, j) - \alpha(v, j)| \leq \frac{K|u - v|}{\ell(j)} \quad (4)$$

et

$$\sup_t |\alpha_{t, T}(j) - \alpha\left(\frac{t}{T}, j\right)| \leq \frac{K}{T\ell(j)}. \quad (5)$$

- Nous définissons alors le processus stationnaire $\tilde{X}_t(u)$, approximation de $X_{t, T}$ dans un voisinage local autour de $u = \frac{t}{T}$

$$\tilde{X}_t(u) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha(u, j) \varepsilon_{t-j}, \quad (6)$$

Définition

- **H₂** : il existe une fonction $\alpha(\cdot, j) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\sup_u |\alpha(u, j)| \leq \frac{K}{\ell(j)},$$

$$\sup_{u, v} |\alpha(u, j) - \alpha(v, j)| \leq \frac{K|u - v|}{\ell(j)} \quad (4)$$

et

$$\sup_t |\alpha_{t, T}(j) - \alpha(\frac{t}{T}, j)| \leq \frac{K}{T\ell(j)}. \quad (5)$$

- Nous définissons alors le processus stationnaire $\tilde{X}_t(u)$, approximation de $X_{t, T}$ dans un voisinage local autour de $u = \frac{t}{T}$

$$\tilde{X}_t(u) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha(u, j)\varepsilon_{t-j}, \quad (6)$$

Définition

$$f(u, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha(u, j) \exp(-i\lambda j) \right|^2 \quad (7)$$

densité spectrale, variant au cours, du temps du processus $X_{t,T}$ au temps $u \in [0, 1]$ et à la fréquence $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

En effet (4) et (5) impliquent

$$\left| X_t - \tilde{X}_t(u) \right| \leq K \left\{ \left| \frac{t}{T} - u \right| + \frac{1}{T} \right\} U_t$$

où $\{U_t\}$ est le processus stationnaire définie par

$$U_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \ell^{-1}(j) |\varepsilon_{t-j}|$$

d'où l'approximation de $X_{t,T}$ par $\tilde{X}_t(u)$ autour de $u = \frac{t}{T}$

Définition

$$f(u, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha(u, j) \exp(-i\lambda j) \right|^2 \quad (7)$$

densité spectrale, variant au cours, du temps du processus $X_{t,T}$ au temps $u \in [0, 1]$ et à la fréquence $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

En effet (4) et (5) impliquent

$$\left| X_t - \tilde{X}_t(u) \right| \leq K \left\{ \left| \frac{t}{T} - u \right| + \frac{1}{T} \right\} U_t$$

où $\{U_t\}$ est le processus stationnaire définie par

$$U_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \ell^{-1}(j) |\varepsilon_{t-j}|$$

d'où l'approximation de $X_{t,T}$ par $\tilde{X}_t(u)$ autour de $u = \frac{t}{T}$

Définition

$$f(u, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha(u, j) \exp(-i\lambda j) \right|^2 \quad (7)$$

densité spectrale, variant au cours, du temps du processus $X_{t,T}$ au temps $u \in [0, 1]$ et à la fréquence $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

En effet (4) et (5) impliquent

$$\left| X_t - \tilde{X}_t(u) \right| \leq K \left\{ \left| \frac{t}{T} - u \right| + \frac{1}{T} \right\} U_t$$

où $\{U_t\}$ est le processus stationnaire définie par

$$U_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \ell^{-1}(j) |\varepsilon_{t-j}|$$

d'où l'approximation de $X_{t,T}$ par $\tilde{X}_t(u)$ autour de $u = \frac{t}{T}$.

Exemple

- Un processus TVAR(p), $a_0(u) = 1$ (TVAR : Time Varying AR)

$$\sum_{j=0}^p a_j\left(\frac{t}{T}\right) X_{t-j,T} = \sigma\left(\frac{t}{T}\right) \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \text{ iid}$$

- Densité spectrale :

$$f(u, \lambda) = \frac{\sigma^2(u)}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^p a_j(u) \exp(i\lambda j) \right|^{-2}$$

Exemple

- Un processus TVAR(p), $a_0(u) = 1$ (TVAR : Time Varying AR)

$$\sum_{j=0}^p a_j\left(\frac{t}{T}\right) X_{t-j,T} = \sigma\left(\frac{t}{T}\right) \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \text{ iid}$$

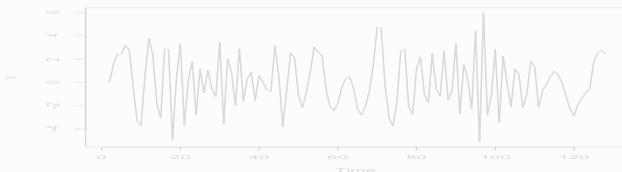
- Densité spectrale :

$$f(u, \lambda) = \frac{\sigma^2(u)}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^p a_j(u) \exp(i\lambda j) \right|^{-2}$$

Exemple

- Simulation d'un TVAR(2)

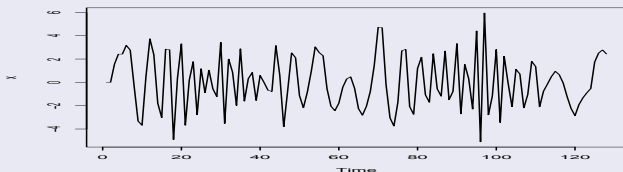
T=128 réalisations d'un AR variant au cours du temps



Exemple

- Simulation d'un TVAR(2)

T=128 réalisations d'un AR variant au cours du temps



Estimateur non paramétrique

- Nous considérons ici l'estimateur à noyau, $\hat{f}_N(u, \lambda)$, défini par

$$\hat{f}_N(u, \lambda) = \frac{1}{Nh_N} \sum_{k=-N_1}^{N_1} K\left(\frac{\lambda - \lambda_k}{h_N}\right) I_N(u, \lambda_k). \quad (8)$$

- où

$$I_N(u, \lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{s=0}^N X_{[uT] - \frac{N}{2} + s + 1, T} e^{-i\lambda s} \right|^2, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi,$$

représente le périodogramme des sous-échantillons.

$K(\cdot)$ est un noyau régulier, symétrique et positif

N la taille du sous-échantillon et N_1 représente le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{N}{2}$.

Estimateur non paramétrique

- Nous considérons ici l'estimateur à noyau, $\hat{f}_N(u, \lambda)$, défini par

$$\hat{f}_N(u, \lambda) = \frac{1}{Nh_N} \sum_{k=-N_1}^{N_1} K\left(\frac{\lambda - \lambda_k}{h_N}\right) I_N(u, \lambda_k). \quad (8)$$

- où

$$I_N(u, \lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{s=0}^N X_{[uT] - \frac{N}{2} + s + 1, T} e^{-i\lambda s} \right|^2, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi,$$

représente le périodogramme des sous-échantillons.

$K(\cdot)$ est un noyau régulier, symétrique et positif

N la taille du sous-échantillon et N_1 représente le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{N}{2}$.

Propriétés de l'estimateur

Les propriétés asymptotiques de l'estimateur $\hat{f}_N(u, \lambda)$ sont étudiées par, Dahlhaus (1996b) et Sergides et Paparoditis (2007).

Propriétés de l'estimateur

Les propriétés asymptotiques de l'estimateur $\hat{f}_N(u, \lambda)$ sont étudiées par, Dahlhaus (1996b) et Sergides et Paparoditis (2007).

- Dans cette section nous définissons l'estimateur *EMDH* dans le cadre de la locale stationnarité et discutons du comportement.
- Considerons un échantillon $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$ provenant d'un processus localement stationnaire $(X_{t,T})$ défini en (3).
- Stationnarité : Estimation à l'aide de l'estimateur non paramétrique à noyau.
- Stationnarité locale : Adaptation de cette estimation avec la version locale de l'estimation non paramétrique à noyau.
Une approche de la densité de Kernel dans la stationnarité globale.

- Dans cette section nous définissons l'estimateur *EMDH* dans le cadre de la locale stationnarité et discutons du comportement.
- Considerons un échantillon $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$ provenant d'un processus localement stationnaire $(X_{t,T})$ défini en (3).
- Stationnarité : Estimation à l'aide de l'estimateur non paramétrique à noyau.
- Stationnarité locale : Adaptation de cette estimation avec la version locale de l'estimation non paramétrique à noyau.
Une approche de la densité de Kernel dans la stationnarité globale.

- Dans cette section nous définissons l'estimateur *EMDH* dans le cadre de la locale stationnarité et discutons du comportement.
- Considerons un échantillon $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$ provenant d'un processus localement stationnaire $(X_{t,T})$ défini en (3).
- Stationnarité : Estimation à l'aide de l'estimateur non paramétrique à noyau.
- Stationnarité locale : Adaptation de cette estimation avec la version locale de l'estimation non paramétrique à noyau.
Une approche de la densité de Kernel dans la stationnarité globale.

- Dans cette section nous définissons l'estimateur *EMDH* dans le cadre de la locale stationnarité et discutons du comportement.
- Considerons un échantillon $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$ provenant d'un processus localement stationnaire $(X_{t,T})$ défini en (3).
- Stationnarité : Estimation à l'aide de l'estimateur non paramétrique à noyau.
- Stationnarité locale : Adaptation de cette estimation avec la version locale de l'estimation non paramétrique à noyau.
Une approche de la densité de Kernel dans la stationnarité globale.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Processus localement stationnaires
- 3 Estimation de la densité spectrale
- 4 Estimateur du minimum de distance de Hellinger sous la stationnarité locale**
 - Définition de l'estimateur
 - Propriétés asymptotiques de l'estimateur
- 5 Simulations

- Généralisation : on pose

$$d_T^{HD}(f_\theta, f_N) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left\| \left\| f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) - f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) \right\|_2 \right\|, \quad (9)$$

autrement dit, la distance de Hellinger entre f_θ et f_N est la moyenne des distances au cours du temps entre $f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$ et $f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$

où $f_\theta(u_j, \cdot)$ et $f_N(u_j, \cdot)$ sont respectivement la densité spectrale paramétrique locale et la densité spectrale non paramétrique local du processus dans le j^{eme} segment et M est le nombre de segments dépendant de N .

- Alors la valeur $\hat{\theta}_T^{DH}$, basée sur $X_{1,T}, X_{2,T}, \dots, X_{T,T}$, est telle que

$$\hat{\theta}_T^{HD} = \arg \min_{\theta \in \Theta} d_T^{HD}(f_\theta, \hat{f}_N). \quad (10)$$

- Généralisation : on pose

$$d_T^{HD}(f_\theta, f_N) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left\| \left\| f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) - f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) \right\|_2 \right\|_2, \quad (9)$$

autrement dit, la distance de Hellinger entre f_θ et f_N est la moyenne des distances au cours du temps entre $f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$ et $f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$

où $f_\theta(u_j, \cdot)$ et $f_N(u_j, \cdot)$ sont respectivement la densité spectrale paramétrique locale et la densité spectrale non paramétrique local du processus dans le j^{eme} segment et M est le nombre de segments dépendant de N .

- Alors la valeur $\hat{\theta}_T^{DH}$, basée sur $X_{1,T}, X_{2,T}, \dots, X_{T,T}$, est telle que

$$\hat{\theta}_T^{HD} = \arg \min_{\theta \in \Theta} d_T^{HD}(f_\theta, \hat{f}_N). \quad (10)$$

- Généralisation : on pose

$$d_T^{HD}(f_\theta, f_N) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left\| \left\| f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) - f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) \right\|_2 \right\|, \quad (9)$$

autrement dit, la distance de Hellinger entre f_θ et f_N est la moyenne des distances au cours du temps entre $f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$ et $f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$

où $f_\theta(u_j, \cdot)$ et $f_N(u_j, \cdot)$ sont respectivement la densité spectrale paramétrique locale et la densité spectrale non paramétrique local du processus dans le j^{eme} segment et M est le nombre de segments dépendant de N .

- Alors la valeur $\hat{\theta}_T^{DH}$, basée sur $X_{1,T}, X_{2,T}, \dots, X_{T,T}$, est telle que

$$\hat{\theta}_T^{HD} = \arg \min_{\theta \in \Theta} d_T^{HD}(f_\theta, \hat{f}_N). \quad (10)$$

- Généralisation : on pose

$$d_T^{HD}(f_\theta, f_N) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left\| \left\| f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) - f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) \right\|_2 \right\|_2, \quad (9)$$

autrement dit, la distance de Hellinger entre f_θ et f_N est la moyenne des distances au cours du temps entre $f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$ et $f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$

où $f_\theta(u_j, \cdot)$ et $f_N(u_j, \cdot)$ sont respectivement la densité spectrale paramétrique locale et la densité spectrale non paramétrique local du processus dans le j^{eme} segment et M est le nombre de segments dépendant de N .

- Alors la valeur $\hat{\theta}_T^{DH}$, basée sur $X_{1,T}, X_{2,T}, \dots, X_{T,T}$, est telle que

$$\hat{\theta}_T^{HD} = \arg \min_{\theta \in \Theta} d_T^{HD}(f_\theta, \hat{f}_N). \quad (10)$$

- Soit $f(u, \lambda)$ la vraie densité spectrale du processus $(X_{t,T})_{t \in \mathbb{Z}}$ et $f_\theta(u, \lambda) \in \mathcal{F}$ la densité spectrale locale du modèle choisi, on définit alors

$$d^{DH}(f_\theta, f) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f_\theta^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) - f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} du, \quad (11)$$

comme la distance entre le vrai processus avec densité spectrale $f(u, \lambda)$ et le modèle avec densité spectrale $f_\theta(u, \lambda)$.

- La meilleure approximation de la valeur du paramètre de notre classe de modèles est donc

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta \in \Theta} d^{HD}(f_\theta, f).$$

- Soit $f(u, \lambda)$ la vraie densité spectrale du processus $(X_{t,T})_{t \in \mathbb{Z}}$ et $f_\theta(u, \lambda) \in \mathcal{F}$ la densité spectrale locale du modèle choisi, on définit alors

$$d^{DH}(f_\theta, f) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f_\theta^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) - f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} du, \quad (11)$$

comme la distance entre le vrai processus avec densité spectrale $f(u, \lambda)$ et le modèle avec densité spectrale $f_\theta(u, \lambda)$.

- La meilleure approximation de la valeur du paramètre de notre classe de modèles est donc

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta \in \Theta} d^{HD}(f_\theta, f).$$

- Soit $f(u, \lambda)$ la vraie densité spectrale du processus $(X_{t,T})_{t \in \mathbb{Z}}$ et $f_\theta(u, \lambda) \in \mathcal{F}$ la densité spectrale locale du modèle choisi, on définit alors

$$d^{DH}(f_\theta, f) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f_\theta^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) - f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} du, \quad (11)$$

comme la distance entre le vrai processus avec densité spectrale $f(u, \lambda)$ et le modèle avec densité spectrale $f_\theta(u, \lambda)$.

- La meilleure approximation de la valeur du paramètre de notre classe de modèles est donc

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta \in \Theta} d^{HD}(f_\theta, f).$$

- La fonction $d_T^{DH}(f_\theta, \hat{f}_N) \longleftrightarrow d^{DH}(f_\theta, f)$ intégrale par $(1/M) \sum_j$ et f par \hat{f}_N la densité spectrale exacte non connue f par l'estimateur nonparamétrique \hat{f}_N .
- Ainsi, nous supposons que $d_T^{DH}(f_\theta, \hat{f}_N)$ est une approximation de la distance exacte $d^{DH}(f_\theta, f)$
- Nous prouvons sous certaines conditions de régularité que $\hat{\theta}_T^{DH}$ converge vers θ_0 .

- La fonction $d_T^{DH}(f_\theta, \hat{f}_N) \longleftrightarrow d^{DH}(f_\theta, f)$ intégrale par $(1/M) \sum_j$ et f par \hat{f}_N la densité spectrale exacte non connue f par l'estimateur nonparamétrique \hat{f}_N .
- Ainsi, nous supposons que $d^{DH}(f_\theta, \hat{f}_N)$ est une approximation de la distance exacte $d^{DH}(f_\theta, f)$
- Nous prouvons sous certaines conditions de régularité que $\hat{\theta}_T^{DH}$ converge vers θ_0 .

- La fonction $d_T^{DH}(f_\theta, \hat{f}_N) \longleftrightarrow d^{DH}(f_\theta, f)$ intégrale par $(1/M) \sum_j$ et f par \hat{f}_N la densité spectrale exacte non connue f par l'estimateur nonparamétrique \hat{f}_N .
- Ainsi, nous supposons que $d^{DH}(f_\theta, \hat{f}_N)$ est une approximation de la distance exacte $d^{DH}(f_\theta, f)$
- Nous prouvons sous certaines conditions de régularité que $\hat{\theta}_T^{DH}$ converge vers θ_0 .

Plan

- 1 Introduction
- 2 Processus localement stationnaires
- 3 Estimation de la densité spectrale
- 4 Estimateur du minimum de distance de Hellinger sous la stationnarité locale**
 - Définition de l'estimateur
 - Propriétés asymptotiques de l'estimateur
- 5 Simulations

- L'établissement de la distribution asymptotique de l'estimateur du MDH est important pour faire des comparaisons théoriques avec d'autres estimateurs et aussi pour faire des approximations inférentielles valides.
- Nous montrons ici la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur MDH.
- Pour l'existence, la continuité et l'unicité, les résultats sont similaires à ceux de Beran (1977).

- L'établissement de la distribution asymptotique de l'estimateur du MDH est important pour faire des comparaisons théoriques avec d'autres estimateurs et aussi pour faire des approximations inférentielles valides.
- Nous montrons ici la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur MDH.
- Pour l'existence, la continuité et l'unicité, les résultats sont similaires à ceux de Beran (1977).

- L'établissement de la distribution asymptotique de l'estimateur du MDH est important pour faire des comparaisons théoriques avec d'autres estimateurs et aussi pour faire des approximations inférentielles valides.
- Nous montrons ici la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur MDH.
- Pour l'existence, la continuité et l'unicité, les résultats sont similaires à ceux de Beran (1977).

Consistance de l'estimateur

Théorème

Supposons que $f \in \mathcal{G}$ soit la vraie fonction de densité spectrale de $X_{t,T}$ définie en (3) et que $I(f)$ soit unique. Alors, sous les hypothèses du Théorème précédent

$$\hat{\theta}_T^{DH} \longrightarrow I(f) \text{ p.s.}$$

En particulier, si $f = f_{\theta_0}$, alors $\hat{\theta}_T^{DH} \longrightarrow \theta_0$ p.s.

Normalité asymptotique

- Soit $s_\theta = f_\theta^2$, supposons pour $\theta \in \Theta^0$ (intérieur à Θ) que s_θ est deux fois différentiable dans L_2 ; c'est à dire, supposons qu'il existe \dot{s}_θ et \ddot{s}_θ dans L_2 qui satisfont, pour chaque β proche de zéro.

$$s_{\theta+\beta}(u, \lambda) = s_\theta(u, \lambda) + \beta \dot{s}_\theta(u, \lambda) + \beta u_\beta(u, \lambda) \quad (12)$$

et

$$\dot{s}_{\theta+\beta}(u, \lambda) = \dot{s}_\theta(u, \lambda) + \beta \ddot{s}_\theta(u, \lambda) + \beta v_\beta(u, \lambda), \quad (13)$$

où u_β et v_β tendent vers zéro dans L_2 quand $\beta \rightarrow 0$.

Normalité asymptotique

- Soit $s_\theta = f_\theta^2$, supposons pour $\theta \in \Theta^0$ (intérieur à Θ) que s_θ est deux fois différentiable dans L_2 ; c'est à dire, supposons qu'il existe \dot{s}_θ et \ddot{s}_θ dans L_2 qui satisfont, pour chaque β proche de zéro.

$$s_{\theta+\beta}(u, \lambda) = s_\theta(u, \lambda) + \beta \dot{s}_\theta(u, \lambda) + \beta u_\beta(u, \lambda) \quad (12)$$

et

$$\dot{s}_{\theta+\beta}(u, \lambda) = \dot{s}_\theta(u, \lambda) + \beta \ddot{s}_\theta(u, \lambda) + \beta v_\beta(u, \lambda), \quad (13)$$

où u_β et v_β tendent vers zéro dans L_2 quand $\beta \rightarrow 0$.

Normalité asymptotique

Théorème

Supposons que (12) et (13) soient réalisées pour $\theta \in \Theta^0$, pour $f \in \mathcal{G}$, $I(f)$ existe, est unique, et $I(f) \in \Theta^0$. Supposons aussi que

$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{s}_{I(f)}(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du > 0$ et que la fonctionnelle I est

continue en f dans la topologie de Hellinger. Alors pour toute suite de densités spectrales $\{f_N\}$ convergeant vers f dans la métrique de Hellinger,

$$I(f_N) = I(f) + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \rho_f(u_j, \lambda) f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \lambda) d\lambda - \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \rho_f(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du \quad (14)$$

$$+ a_N \left(\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \dot{s}_{I(f)}(u_j, \lambda) \hat{f}_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \lambda) d\lambda - \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \dot{s}_{I(f)}(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du \right),$$

Normalité asymptotique

Théorème

Supposons que (12) et (13) soient réalisées pour $\theta \in \Theta^0$, pour $f \in \mathcal{G}$, $I(f)$ existe, est unique, et $I(f) \in \Theta^0$. Supposons aussi que

$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{s}_{I(f)}(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du > 0$ et que la fonctionnelle I est

continue en f dans la topologie de Hellinger. Alors pour toute suite de densités spectrales $\{f_N\}$ convergeant vers f dans la métrique de Hellinger,

$$I(f_N) = I(f) + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \rho_f(u_j, \lambda) f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \lambda) d\lambda - \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \rho_f(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du \quad (14)$$

$$+ a_N \left(\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \dot{s}_{I(f)}(u_j, \lambda) \hat{f}_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \lambda) d\lambda - \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \dot{s}_{I(f)}(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du \right),$$

Normalité asymptotique

- où

$$\rho_f(u, \lambda) = - \frac{\dot{s}_{I(f)}(u, \lambda)}{\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{s}_{I(f)}(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du}$$

et a_N tend vers zéro quand $N \rightarrow \infty$.

- En utilisant la représentation (14), nous montrons par le théorème ci-après, que l'EMDH $\hat{\theta}_T^{DH} = I(\hat{f}_N)$ suit asymptotiquement une distribution normale.

Normalité asymptotique

- où

$$\rho_f(u, \lambda) = - \frac{\dot{s}_{I(f)}(u, \lambda)}{\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{s}_{I(f)}(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du}$$

et a_N tend vers zéro quand $N \rightarrow \infty$.

- En utilisant la représentation (14), nous montrons par le théorème ci-après, que l'EMDH $\hat{\theta}_T^{DH} = I(\hat{f}_N)$ suit asymptotiquement une distribution normale.

Normalité asymptotique

- où

$$\rho_f(u, \lambda) = - \frac{\dot{s}_{I(f)}(u, \lambda)}{\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{s}_{I(f)}(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du}$$

et a_N tend vers zéro quand $N \rightarrow \infty$.

- En utilisant la représentation (14), nous montrons par le théorème ci-après, que l'EMDH $\hat{\theta}_T^{DH} = I(\hat{f}_N)$ suit asymptotiquement une distribution normale.

Normalité asymptotique

Théorème

Supposons $f \in \mathcal{G}$ est la vraie densité spectrale de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ définie en (3). Supposons que (12) et (13) sont réalisées et ρ a un support compact $K = [-\pi, \pi]$ sur lequel il est continu. Supposons $f > 0$ sur K ; f est deux fois absolument continue et f'' est bornée par rapport à λ . Supposons que $I(f)$ existe, est unique et $J(f) \in \Theta^0$ (intérieur de Θ), $\int \ddot{s}_{I(f)}(u_j, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u_j, \lambda) d\lambda > 0$ pour tout $j = 1, \dots, M$, et $\dot{s}_{I(f)} \in L_2$. Alors, pour toute suite (h_N) telle que $h_N \rightarrow 0$, $Nh_N^3 \rightarrow \infty$ et $T^{1/2}h_N^2 \rightarrow 0$ et sous les hypothèses du Théorème précédent,

$$\sqrt{T}(I(\hat{f}_N) - I(f)) \longrightarrow \mathcal{N}(0, V) \quad (15)$$

Normalité asymptotique

où

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \rho(u, -\lambda) \rho(u, \lambda) f(u, \lambda) d\lambda du + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \rho^2(u, -\lambda) f(u, \lambda) d\lambda du$$

En particulier, si $f = f_{\theta}$, $I(f) = \theta_0$ est équivalent à θ et donc

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_T^{DH} - \theta) \longrightarrow \mathcal{N}(0, V) \quad (16)$$

où

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\dot{s}_{\theta}(u, -\lambda) \dot{s}_{\theta}(u, \lambda)} s_{\theta}(u, \lambda) d\lambda du + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\dot{s}_{\theta}^2(u, -\lambda)} s_{\theta}(u, \lambda) d\lambda du$$

Simulation

- Nous présentons ici un exemple de simulation pour l'estimation de $\hat{\theta}_T^{DH}$ d'un processus AR(2) localement stationnaire

$$X_{t,T} + a_1\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-1,T} + a_2\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-2,T} = \sigma\left(\frac{t}{T}\right)\varepsilon_t \quad (17)$$

où les ε_t sont des v.a. i.i.d gaussiennes de moyenne zéro et de variance 1. Les paramètres autorégressifs $a_i = a_i\left(\frac{t}{T}\right)$, $i = 1, 2$ sont des fonctions qui changent au cours du temps.

- Comme paramètres nous choisissons $a_1(u) = -1.8 \cos(1.5 - \cos 4\pi u)$, i.e. $a_1(u)$ varie au cours du temps, $a_2(u) = 0.832$ pour tout $0 \leq u \leq 1$, i.e. $a_2(u)$ est constant à travers le temps, $\sigma(u) = 1.0$. Nous générons $T = 128$ observations provenant du modèle (17).

Simulation

- Nous présentons ici un exemple de simulation pour l'estimation de $\hat{\theta}_T^{DH}$ d'un processus AR(2) localement stationnaire

$$X_{t,T} + a_1\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-1,T} + a_2\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-2,T} = \sigma\left(\frac{t}{T}\right)\varepsilon_t \quad (17)$$

où les ε_t sont des v.a. i.i.d gaussiennes de moyenne zéro et de variance 1. Les paramètres autorégressifs $a_i = a_i\left(\frac{t}{T}\right)$, $i = 1, 2$ sont des fonctions qui changent au cours du temps.

- Comme paramètres nous choisissons $a_1(u) = -1.8 \cos(1.5 - \cos 4\pi u)$, i.e. $a_1(u)$ varie au cours du temps, $a_2(u) = 0.832$ pour tout $0 \leq u \leq 1$, i.e. $a_2(u)$ est constant à travers le temps, $\sigma(u) = 1.0$. Nous générons $T = 128$ observations provenant du modèle (17).

Simulation

- Nous présentons ici un exemple de simulation pour l'estimation de $\hat{\theta}_T^{DH}$ d'un processus AR(2) localement stationnaire

$$X_{t,T} + a_1\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-1,T} + a_2\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-2,T} = \sigma\left(\frac{t}{T}\right)\varepsilon_t \quad (17)$$

où les ε_t sont des v.a. i.i.d gaussiennes de moyenne zéro et de variance 1. Les paramètres autorégressifs $a_i = a_i\left(\frac{t}{T}\right)$, $i = 1, 2$ sont des fonctions qui changent au cours du temps.

- Comme paramètres nous choisissons $a_1(u) = -1.8 \cos(1.5 - \cos 4\pi u)$, i.e. $a_1(u)$ varie au cours du temps, $a_2(u) = 0.832$ pour tout $0 \leq u \leq 1$, i.e. $a_2(u)$ est constant à travers le temps, $\sigma(u) = 1.0$. Nous générons $T = 128$ observations provenant du modèle (17).

Simulation

- On génère ainsi un processus $X_{t,T}$ localement stationnaire et sa densité spectrale dépendant du temps comme dans (7) est

$$f(u, \lambda) = \frac{\sigma^2(u)}{2\pi} \left| 1 + \sum_{j=1}^2 a_j(u) \exp(i\lambda j) \right|^{-2} = f_{\theta(u)}(\lambda).$$

- Estimation à partir des données générées du paramètre $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ tels que $a_1(u) = -\theta_1 \cos(\theta_2 - \cos(4\pi u))$, $a_2(u) = \theta_3$ and $\sigma^2(u) = \theta_4$. L'estimateur de la densité spectrale du noyau définie par (8) est utilisé. Pour calculer le périodogramme, nous choisissons $S = 2$, $N = 16$ (i.e., $M = 57$). Pour le choix de la fonction du noyau dans \hat{f}_N , nous utilisons la densité de la distribution de $\mathcal{N}(0, 1)$.

Simulation

- On génère ainsi un processus $X_{t,T}$ localement stationnaire et sa densité spectrale dépendant du temps comme dans (7) est

$$f(u, \lambda) = \frac{\sigma^2(u)}{2\pi} \left| 1 + \sum_{j=1}^2 a_j(u) \exp(i\lambda j) \right|^{-2} = f_{\theta(u)}(\lambda).$$

- Estimation à partir des données générées du paramètre $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ tels que $a_1(u) = -\theta_1 \cos(\theta_2 - \cos(4\pi u))$, $a_2(u) = \theta_3$ and $\sigma^2(u) = \theta_4$. L'estimateur de la densité spectrale du noyau définie par (8) est utilisé. Pour calculer le périodogramme, nous choisissons $S = 2$, $N = 16$ (i.e., $M = 57$). Pour le choix de la fonction du noyau dans \hat{f}_N , nous utilisons la densité de la distribution de $\mathcal{N}(0, 1)$.

Simulation

- Choix de la largeur de la fenêtre :
→ Utilisation de l'erreur moyenne quadratique intégrée

$$MISE(u, h) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E} \left(\widehat{f}_N(u, \lambda) - f(u, \lambda) \right)^2 \pi(u, \lambda) d\lambda du$$

π la fonction de poids est supposée connue et nulle en dehors de $[-\pi, \pi] \times [0, 1]$.

- Sélectionner h minimisant la $MISE$, f inconnue \implies Estimation de la $MISE$ en adoptant la méthode de la validation croisée (Rudemo (1982) et Bowman (1984)). On considère l'erreur quadratique intégrée "Integrated square error" ISE définie par :

$$ISE(u, h) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\widehat{f}_N(u, \lambda) - f(u, \lambda) \right)^2 \pi(u, \lambda) d\lambda du$$

Simulation

- Choix de la largeur de la fenêtre :
→ Utilisation de l'erreur moyenne quadratique intégrée

$$MISE(u, h) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E} \left(\widehat{f}_N(u, \lambda) - f(u, \lambda) \right)^2 \pi(u, \lambda) d\lambda du$$

π la fonction de poids est supposée connue et nulle en dehors de $[-\pi, \pi] \times [0, 1]$.

- Sélectionner h minimisant la $MISE$, f inconnue \implies Estimation de la $MISE$ en adoptant la méthode de la validation croisée (Rudemo (1982) et Bowman (1984)). On considère l'erreur quadratique intégrée "Integrated square error" ISE définie par :

$$ISE(u, h) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\widehat{f}_N(u, \lambda) - f(u, \lambda) \right)^2 \pi(u, \lambda) d\lambda du$$

Simulation

- Approximation de ISE par le critère CV , Grégoire (1993), défini par :

$$CV(h, u) = CV_1(h, u) + \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f^2(u, \lambda) \pi(u, \lambda) d\lambda du$$

- où

$$CV_1(h, u) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f_N^2(u, \lambda) \pi(u, \lambda) d\lambda du - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{\bar{N}} \int_0^1 f_N^j(u, \lambda_j) I_N(u, \lambda_j)$$

$$\text{où } \lambda_j = \frac{2\pi j}{N}, \bar{N} = \left[\frac{N-1}{2} \right] \text{ et } f_N^j(u, \lambda) = \frac{1}{Nh_N} \sum_{k=-N_1}^{N_1} K\left(\frac{\lambda - \lambda_k}{h_N}\right) I_N^j(u, \lambda_k)$$

$$\pi(u, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{sur } [0, 2\pi] \times [0, 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Simulation

- Approximation de ISE par le critère CV , Grégoire (1993), défini par :

$$CV(h, u) = CV_1(h, u) + \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f^2(u, \lambda) \pi(u, \lambda) d\lambda du$$

- où

$$CV_1(h, u) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f_N^2(u, \lambda) \pi(u, \lambda) d\lambda du - \frac{2}{\bar{N}} \sum_{j=1}^{\bar{N}} \int_0^1 f_N^j(u, \lambda_j) I_N(u, \lambda_j)$$

$$\text{où } \lambda_j = \frac{2\pi j}{\bar{N}}, \bar{N} = \left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil \text{ et } f_N^j(u, \lambda) = \frac{1}{Nh_N} \sum_{k=-N_1}^{N_1} K\left(\frac{\lambda - \lambda_k}{h_N}\right) f_N^j(u, \lambda_k)$$

$$\pi(u, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{sur } [0, 2\pi] \times [0, 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Simulation

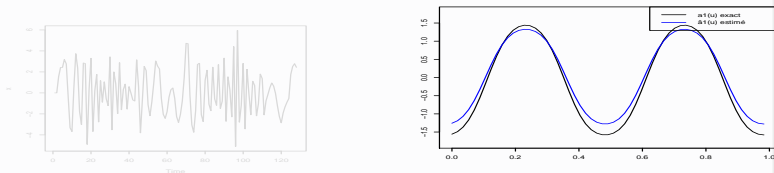
- Ainsi, la largeur de la fenêtre spectrale sera choisie au point h minimisant le critère $CV(h)$:

$$\hat{h} = \arg \min_h CV(u, h) = \arg \min_h CV_1(u, h)$$

Simulation

Les résultats des données simulées sont présentées en Figure 2.

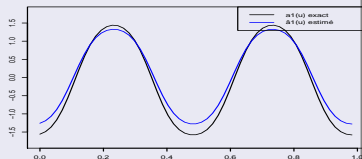
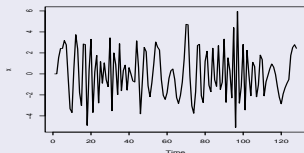
FIG. 2 – Réalisations d'un time varying AR-model et Coefficient $a_1(u)$ exact et estimé variant au cours du temps



Simulation

Les résultats des données simulées sont présentées en Figure 2.

FIG. 2 – Réalisations d'un time varying AR-model et Coefficient $a_1(u)$ exact et estimé variant au cours du temps



Simulation

- Méthode de Monte Carlo avec 3000 réplifications : $\hat{a}_1(u)$ in Figure 2, $\hat{a}_2(u) = 0.819$, et $\hat{\sigma}(u) = 1.28$
- **Robustesse** : Nouvel estimateur pour θ de f_θ . L'estimateur pour $I(f)$ est défini par

$$d_H(f_{I(\hat{f}_{\alpha,N})}, f_\alpha) = \min_{t \in \Theta} d_H(f_t, \hat{f}_{\alpha,N})$$

où $\hat{f}_{\alpha,N} = (1 - \alpha)\hat{f}_N + \alpha\delta_{[0,1]}$ est la densité contaminée et $\delta_{[0,1]}$ représente la densité uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et $\alpha \in [0, 1]$.

- Dans l'estimation par le MDH des coefficients du modèle (17), nous remplaçons \hat{f}_N par $\hat{f}_{\alpha,N}$ pour six valeurs particulières de α .
- Une application de Monte Carlo \implies la Table suivante pour les valeurs de $\hat{a}_2(u)$ et $\hat{\sigma}(u)$ et les figures suivantes pour $\hat{a}_1(u)$.

Simulation

- Méthode de Monte Carlo avec 3000 réplifications : $\hat{a}_1(u)$ in Figure 2, $\hat{a}_2(u) = 0.819$, et $\hat{\sigma}(u) = 1.28$
- **Robustesse** : Nouvel estimateur pour θ de f_θ . L'estimateur pour $I(f)$ est défini par

$$d_H(f_{I(\hat{f}_{\alpha,N})}, f_\alpha) = \min_{t \in \Theta} d_H(f_t, \hat{f}_{\alpha,N})$$

où $\hat{f}_{\alpha,N} = (1 - \alpha)\hat{f}_N + \alpha\delta_{[0,1]}$ est la densité contaminée et $\delta_{[0,1]}$ représente la densité uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et $\alpha \in [0, 1]$.

- Dans l'estimation par le MDH des coefficients du modèle (17), nous remplaçons \hat{f}_N par $\hat{f}_{\alpha,N}$ pour six valeurs particulières de α .
- Une application de Monte Carlo \implies la Table suivante pour les valeurs de $\hat{a}_2(u)$ et $\hat{\sigma}(u)$ et les figures suivantes pour $\hat{a}_1(u)$.

Simulation

- Méthode de Monte Carlo avec 3000 réplifications : $\hat{a}_1(u)$ in Figure 2, $\hat{a}_2(u) = 0.819$, et $\hat{\sigma}(u) = 1.28$
- **Robustesse** : Nouvel estimateur pour θ de f_θ . L'estimateur pour $I(f)$ est défini par

$$d_H(f_{I(\hat{f}_{\alpha,N})}, f_\alpha) = \min_{t \in \Theta} d_H(f_t, \hat{f}_{\alpha,N})$$

où $\hat{f}_{\alpha,N} = (1 - \alpha)\hat{f}_N + \alpha\delta_{[0,1]}$ est la densité contaminée et $\delta_{[0,1]}$ représente la densité uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et $\alpha \in [0, 1]$.

- Dans l'estimation par le MDH des coefficients du modèle (17), nous remplaçons \hat{f}_N par $\hat{f}_{\alpha,N}$ pour six valeurs particulières de α .
- Une application de Monte Carlo \implies la Table suivante pour les valeurs de $\hat{a}_2(u)$ et $\hat{\sigma}(u)$ et les figures suivantes pour $\hat{a}_1(u)$.

Simulation

- Méthode de Monte Carlo avec 3000 réplifications : $\hat{a}_1(u)$ in Figure 2, $\hat{a}_2(u) = 0.819$, et $\hat{\sigma}(u) = 1.28$
- **Robustesse** : Nouvel estimateur pour θ de f_θ . L'estimateur pour $I(f)$ est défini par

$$d_H(f_{I(\hat{f}_{\alpha,N})}, f_\alpha) = \min_{t \in \Theta} d_H(f_t, \hat{f}_{\alpha,N})$$

où $\hat{f}_{\alpha,N} = (1 - \alpha)\hat{f}_N + \alpha\delta_{[0,1]}$ est la densité contaminée et $\delta_{[0,1]}$ représente la densité uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et $\alpha \in [0, 1]$.

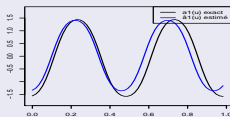
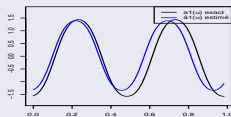
- Dans l'estimation par le MDH des coefficients du modèle (17), nous remplaçons \hat{f}_N par $\hat{f}_{\alpha,N}$ pour six valeurs particulières de α .
- Une application de Monte Carlo \implies la Table suivante pour les valeurs de $\hat{a}_2(u)$ et $\hat{\sigma}(u)$ et les figures suivantes pour $\hat{a}_1(u)$.

Simulation

Table 1

α	$\hat{a}_2(u)$	$\hat{\sigma}(u)$
0.05	0.805	1.007
0.1	0.821	1.019
0.2	0.737	0.986
0.3	0.818	0.962
0.4	0.831	1.296
0.5	0.826	1.103

Simulation

 $\alpha = 0.05$  $\alpha = 0.1$ 

1–Coefficient $a_1(u)$ exact et estimé variant au cours du temps.

FIG.

Simulation

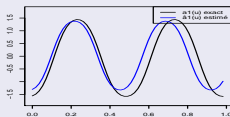
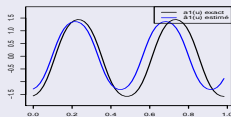
 $\alpha = 0.2$  $\alpha = 0.3$ 

FIG.

2–Coefficient $a_1(u)$ exact et estimé variant au cours du temps.

Simulation

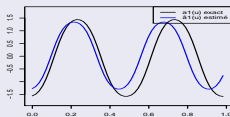
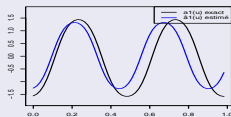




 $\alpha = 0.4$  $\alpha = 0.5$ 






FIG.

3—Coéfficient $a_1(u)$ exact et estimé variant au cours du temps.

Quelques éléments bibliographiques

-  Beran, R. J. (1977). Minimum Hellinger Distance Estimates for Parametric Models, *Ann. Stat.*, **5**, 445-463.
-  Dahlhaus, R. (1996b). Asymptotic statistical inference for nonstationary process with evolutionary spectra. *In Athens Conference on Applied Probability and Time Series Analysis*, (P. M. Robinson and M. Rosenblatt, eds) **2**. Springer, New York, pp. 145–159.
-  Dahlhaus, R. (1997). Fitting time Series Models to Nonstationary Processes. *The Annals of Statistics*, **25**, 1-37.
-  Hili, O. (1995). On the estimation of nonlinear time series models, *Stoch. Stoch. Rep.* **52**, 207–226.

Quelques éléments bibliographiques

-  Hosoya, Y. (1974). Estimation problems on stationary time-series models. Ph.D. Thesis Yale University.
-  Ludeña, C. (2000). Parametric estimation for Gaussian longrange dependent processes based on the log-periodogram. Bernoulli 6(4), 2000, 709-728.
-  Sergides, M. and Paparoditis, E. (2007). Bootstrapping the local periodogram of locally stationary processes. Journal of Time Series Analysis, Vol. 29, Issue 2, pp. 264-299.
-  Stărică, C. and Granger, C.W.J. (2005). Nonstationarities in stock return, The review of Economics and Statistics, 81, 553-574.
-  Taniguchi, M. (1979). On estimation of parameters of Gaussian Stationary Processes. J. Appl. Prob., 16, 575-591.

Merci pour votre attention !