

# Estimation des processus localement stationnaires par la distance minimale de Hellinger

S. Fofana<sup>1</sup>, A. Diop<sup>2</sup>, O. Hili<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (ENSAE), Sénégal

<sup>2</sup>Université Gaston Berger (UGB), Saint-Louis, Sénégal

<sup>3</sup>Institut National Polytechnique Félix Houphouët-Boigny (INPHB),

Yamoussoukro, Côte d'Ivoire

CIMPA, Abidjan 2014

Abidjan, 27 Mars 2014

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Processus localement stationnaires
- 3 Estimation de la densité spectrale
- 4 Estimateur du minimum de distance de Hellinger sous la stationnarité locale
  - Définition de l'estimateur
  - Propriétés asymptotiques de l'estimateur
- 5 Simulations

# Introduction

- 1 La stationnarité constitue l'hypothèse de base : Identification, Estimation et Prévision.
- 2 Comportement non stationnaire des processus, Stărică et Granger (2005).
- 3 Hypothèse :  $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$   $T$  observations issues d'un processus localement stationnaire  $(X_{t,T})$  avec une densité spectrale  $f$  variant au cours du temps et appartenant à une famille paramétrique de densités spectrales  $\mathcal{F} = \{f_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$ .
- 4 L'objectif est d'estimer le paramètre d'intérêt  $\theta$ .
- 5 Estimation de  $\theta$  par Hosoya (1974) et Taniguchi (1979) en minimisant  $\int_{-\pi}^{\pi} \left( \log f_\theta(\lambda) + I_T(\lambda) / f_\theta(\lambda) \right) d\lambda$ .

# Introduction

- 1 La stationnarité constitue l'hypothèse de base : Identification, Estimation et Prédiction.
- 2 Comportement non stationnaire des processus, Stărică et Granger (2005).
- 3 Hypothèse :  $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$   $T$  observations issues d'un processus localement stationnaire  $(X_{t,T})$  avec une densité spectrale  $f$  variant au cours du temps et appartenant à une famille paramétrique de densités spectrales  $\mathcal{F} = \{f_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$ .
- 4 L'objectif est d'estimer le paramètre d'intérêt  $\theta$ .
- 5 Estimation de  $\theta$  par Hosoya (1974) et Taniguchi (1979) en minimisant  $\int_{-\pi}^{\pi} \left( \log f_\theta(\lambda) + I_T(\lambda) / f_\theta(\lambda) \right) d\lambda$ .

# Introduction

- 1 La stationnarité constitue l'hypothèse de base : Identification, Estimation et Prévision.
- 2 Comportement non stationnaire des processus, Stărică et Granger (2005).
- 3 Hypothèse :  $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$   $T$  observations issues d'un processus localement stationnaire  $(X_{t,T})$  avec une densité spectrale  $f$  variant au cours du temps et appartenant à une famille paramétrique de densités spectrales  $\mathcal{F} = \{f_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$ .
- 4 L'objectif est d'estimer le paramètre d'intérêt  $\theta$ .
- 5 Estimation de  $\theta$  par Hosoya (1974) et Taniguchi (1979) en minimisant  $\int_{-\pi}^{\pi} \left( \log f_\theta(\lambda) + I_T(\lambda) / f_\theta(\lambda) \right) d\lambda$ .

# Introduction

- 1 La stationnarité constitue l'hypothèse de base : Identification, Estimation et Prédiction.
- 2 Comportement non stationnaire des processus, Stărică et Granger (2005).
- 3 Hypothèse :  $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$   $T$  observations issues d'un processus localement stationnaire  $(X_{t,T})$  avec une densité spectrale  $f$  variant au cours du temps et appartenant à une famille paramétrique de densités spectrales  $\mathcal{F} = \{f_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$ .
- 4 L'objectif est d'estimer le paramètre d'intérêt  $\theta$ .
- 5 Estimation de  $\theta$  par Hosoya (1974) et Taniguchi (1979) en minimisant  $\int_{-\pi}^{\pi} \left( \log f_\theta(\lambda) + I_T(\lambda) / f_\theta(\lambda) \right) d\lambda$ .

# Introduction

- 1 La stationnarité constitue l'hypothèse de base : Identification, Estimation et Prédiction.
- 2 Comportement non stationnaire des processus, Stărică et Granger (2005).
- 3 Hypothèse :  $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$   $T$  observations issues d'un processus localement stationnaire  $(X_{t,T})$  avec une densité spectrale  $f$  variant au cours du temps et appartenant à une famille paramétrique de densités spectrales  $\mathcal{F} = \{f_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$ .
- 4 L'objectif est d'estimer le paramètre d'intérêt  $\theta$ .
- 5 Estimation de  $\theta$  par Hosoya (1974) et Taniguchi (1979) en minimisant  $\int_{-\pi}^{\pi} \left( \log f_\theta(\lambda) + I_T(\lambda) / f_\theta(\lambda) \right) d\lambda$ .

# Introduction

- 1 Estimation de  $\theta$  par Dahlhaus (1997) en minimisant

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \left( \log f_{\theta}(u_j, \lambda) + I_T(u_j, \lambda) / f_{\theta}(u_j, \lambda) \right) d\lambda.$$

- 2 Le problème d'estimation du paramètre
  - cas temporel basé sur les distributions de probabilité.
  - cas spectral avec des processus non stationnaires, un cas rarement étudié, bien qu'il soit très important pour plusieurs applications (économie, finance,...).
- 3 Les premiers résultats théoriques sont dûs, d'une part à Dahlhaus (1997) et d'autre part à Ludeña (2000).
- 4 L'objectif de ce travail est de proposer un estimateur robuste et applicable pour les processus localement stationnaires.
- 5 Méthode d'estimation par le Minimum de Distance de Hellinger (MDH)



# Introduction

- 1 Estimation de  $\theta$  par Dahlhaus (1997) en minimisant

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \left( \log f_{\theta}(u_j, \lambda) + I_T(u_j, \lambda) / f_{\theta}(u_j, \lambda) \right) d\lambda.$$

- 2 Le problème d'estimation du paramètre
- cas temporel basé sur les distributions de probabilité.
  - cas spectral avec des processus non stationnaires, un cas rarement étudié, bien qu'il soit très important pour plusieurs applications (économie, finance,...).
- 3 Les premiers résultats théoriques sont dûs, d'une part à Dahlhaus (1997) et d'autre part à Ludeña (2000).
- 4 L'objectif de ce travail est de proposer un estimateur robuste et applicable pour les processus localement stationnaires.
- 5 Méthode d'estimation par le Minimum de Distance de Hellinger (MDH)

# Introduction

- 1 Estimation de  $\theta$  par Dahlhaus (1997) en minimisant

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \left( \log f_{\theta}(u_j, \lambda) + I_T(u_j, \lambda) / f_{\theta}(u_j, \lambda) \right) d\lambda.$$

- 2 Le problème d'estimation du paramètre
- cas temporel basé sur les distributions de probabilité.
  - cas spectral avec des processus non stationnaires, un cas rarement étudié, bien qu'il soit très important pour plusieurs applications (économie, finance,...).
- 3 Les premiers résultats théoriques sont dûs, d'une part à Dahlhaus (1997) et d'autre part à Ludeña (2000).
- 4 L'objectif de ce travail est de proposer un estimateur robuste et applicable pour les processus localement stationnaires.
- 5 Méthode d'estimation par le Minimum de Distance de Hellinger (MDH)

# Introduction

- 1 Estimation de  $\theta$  par Dahlhaus (1997) en minimisant

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \left( \log f_{\theta}(u_j, \lambda) + I_T(u_j, \lambda) / f_{\theta}(u_j, \lambda) \right) d\lambda.$$

- 2 Le problème d'estimation du paramètre
  - cas temporel basé sur les distributions de probabilité.
  - cas spectral avec des processus non stationnaires, un cas rarement étudié, bien qu'il soit très important pour plusieurs applications (économie, finance,...).
- 3 Les premiers résultats théoriques sont dûs, d'une part à Dahlhaus (1997) et d'autre part à Ludeña (2000).
- 4 L'objectif de ce travail est de proposer un estimateur robuste et applicable pour les processus localement stationnaires.
- 5 Méthode d'estimation par le Minimum de Distance de Hellinger (MDH)

# Introduction

- 1 Estimation de  $\theta$  par Dahlhaus (1997) en minimisant

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \left( \log f_{\theta}(u_j, \lambda) + I_T(u_j, \lambda) / f_{\theta}(u_j, \lambda) \right) d\lambda.$$

- 2 Le problème d'estimation du paramètre
- cas temporel basé sur les distributions de probabilité.
  - cas spectral avec des processus non stationnaires, un cas rarement étudié, bien qu'il soit très important pour plusieurs applications (économie, finance,...).
- 3 Les premiers résultats théoriques sont dûs, d'une part à Dahlhaus (1997) et d'autre part à Ludeña (2000).
- 4 L'objectif de ce travail est de proposer un estimateur robuste et applicable pour les processus localement stationnaires.
- 5 Méthode d'estimation par le Minimum de Distance de Hellinger (MDH)

# Introduction

- 1 Estimation de  $\theta$  par Dahlhaus (1997) en minimisant

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \left( \log f_{\theta}(u_j, \lambda) + I_T(u_j, \lambda) / f_{\theta}(u_j, \lambda) \right) d\lambda.$$

- 2 Le problème d'estimation du paramètre
- cas temporel basé sur les distributions de probabilité.
  - cas spectral avec des processus non stationnaires, un cas rarement étudié, bien qu'il soit très important pour plusieurs applications (économie, finance,...).
- 3 Les premiers résultats théoriques sont dûs, d'une part à Dahlhaus (1997) et d'autre part à Ludeña (2000).
- 4 L'objectif de ce travail est de proposer un estimateur robuste et applicable pour les processus localement stationnaires.
- 5 Méthode d'estimation par le Minimum de Distance de Hellinger (MDH)

# Introduction

Nous présentons ici des données non stationnaires : le SP 500. Dans plusieurs applications, cette série est d'abord stationnarisée avant d'être étudiée. Dans notre étude, pour ne pas perdre certaines informations nous proposons d'estimer localement cette série.



# Introduction : L'estimateur du minimum de distance de Hellinger

- L'EMDH, que nous notons ici  $\hat{\theta}_T^{DH}$ , est la valeur du paramètre  $\theta$  qui minimise la distance de Hellinger entre un estimateur non paramétrique  $\hat{f}_T$  et  $f_\theta$  une densité spectrale appartenant à la famille paramétrique spectrale  $\mathcal{F}$ .

$$\hat{\theta}_T^{DH} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \|f_\theta^{\frac{1}{2}} - \hat{f}_T^{\frac{1}{2}}\|_2 \quad (1)$$

$$\|f_\theta - \hat{f}_T\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f_\theta(\lambda) - \hat{f}_T(\lambda)]^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{est la norme usuelle } L_2. \quad (2)$$

$\hat{\theta}_T^{DH}$  est la valeur de  $\theta$  qui minimise la distance de Hellinger  $d_H(f_\theta, \hat{f}_T)$

# Introduction : L'estimateur du minimum de distance de Hellinger

- L'EMDH, que nous notons ici  $\hat{\theta}_T^{DH}$ , est la valeur du paramètre  $\theta$  qui minimise la distance de Hellinger entre un estimateur non paramétrique  $\hat{f}_T$  et  $f_\theta$  une densité spectrale appartenant à la famille paramétrique spectrale  $\mathcal{F}$ .

$$\hat{\theta}_T^{DH} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{arg\,min}} \|f_\theta^{\frac{1}{2}} - \hat{f}_T^{\frac{1}{2}}\|_2 \quad (1)$$

$$\|f_\theta - \hat{f}_T\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f_\theta(\lambda) - \hat{f}_T(\lambda)]^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{est la norme usuelle } L_2. \quad (2)$$

$\hat{\theta}_T^{DH}$  est la valeur de  $\theta$  qui minimise la distance de Hellinger  $d_H(f_\theta, \hat{f}_T)$



# Définition

- $X_{t,T}$  est dit localement stationnaire si

$$X_{t,T} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{t,T}(j) \varepsilon_{t-j}, \quad (3)$$

où les  $\varepsilon_t$  sont des v.a i.i.d avec  $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$ ,  $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = 1$  et  $\mathbb{E}\varepsilon_t^4 < \infty$ . Les coefficients  $\alpha_{t,T}(j)$  variant au cours du temps satisfont les conditions suivantes :

- $\mathbf{H}_1$  : il existe une suite  $\{\ell(j), j \in \mathbb{Z}\}$  satisfaisant

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|j|}{\ell(j)} < \infty$$

et telle que

$$\sup_t |\alpha_{t,T}(j)| \leq \frac{K}{\ell(j)}.$$

# Définition

- $X_{t,T}$  est dit localement stationnaire si

$$X_{t,T} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{t,T}(j) \varepsilon_{t-j}, \quad (3)$$

où les  $\varepsilon_t$  sont des v.a i.i.d avec  $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$ ,  $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = 1$  et  $\mathbb{E}\varepsilon_t^4 < \infty$ . Les coefficients  $\alpha_{t,T}(j)$  variant au cours du temps satisfont les conditions suivantes :

- $H_1$  : il existe une suite  $\{\ell(j), j \in \mathbb{Z}\}$  satisfaisant

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|j|}{\ell(j)} < \infty$$

et telle que

$$\sup_t |\alpha_{t,T}(j)| \leq \frac{K}{\ell(j)}.$$

## Définition

- $X_{t,T}$  est dit localement stationnaire si

$$X_{t,T} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{t,T}(j) \varepsilon_{t-j}, \quad (3)$$

où les  $\varepsilon_t$  sont des v.a i.i.d avec  $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$ ,  $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = 1$  et  $\mathbb{E}\varepsilon_t^4 < \infty$ . Les coefficients  $\alpha_{t,T}(j)$  variant au cours du temps satisfont les conditions suivantes :

- $\mathbf{H}_1$  : il existe une suite  $\{\ell(j), j \in \mathbb{Z}\}$  satisfaisant

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|j|}{\ell(j)} < \infty$$

et telle que

$$\sup_t |\alpha_{t,T}(j)| \leq \frac{K}{\ell(j)}.$$

# Définition

- **H<sub>2</sub>** : il existe une fonction  $\alpha(\cdot, j) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant

$$\sup_u |\alpha(u, j)| \leq \frac{K}{\ell(j)},$$

$$\sup_{u, v} |\alpha(u, j) - \alpha(v, j)| \leq \frac{K|u - v|}{\ell(j)} \quad (4)$$

et

$$\sup_t |\alpha_{t, T}(j) - \alpha(\frac{t}{T}, j)| \leq \frac{K}{T\ell(j)}. \quad (5)$$

- Nous définissons alors le processus stationnaire  $\tilde{X}_t(u)$ , approximation de  $X_{t, T}$  dans un voisinage local autour de  $u = \frac{t}{T}$

$$\tilde{X}_t(u) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha(u, j) \varepsilon_{t-j}, \quad (6)$$

## Définition

- **H<sub>2</sub>** : il existe une fonction  $\alpha(\cdot, j) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant

$$\sup_u |\alpha(u, j)| \leq \frac{K}{\ell(j)},$$

$$\sup_{u, v} |\alpha(u, j) - \alpha(v, j)| \leq \frac{K|u - v|}{\ell(j)} \quad (4)$$

et

$$\sup_t |\alpha_{t, T}(j) - \alpha(\frac{t}{T}, j)| \leq \frac{K}{T\ell(j)}. \quad (5)$$

- Nous définissons alors le processus stationnaire  $\tilde{X}_t(u)$ , approximation de  $X_{t, T}$  dans un voisinage local autour de  $u = \frac{t}{T}$

$$\tilde{X}_t(u) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha(u, j)\varepsilon_{t-j}, \quad (6)$$

# Définition

$$f(u, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha(u, j) \exp(-i\lambda j) \right|^2 \quad (7)$$

densité spectrale, variant au cours, du temps du processus  $X_{t,T}$  au temps  $u \in [0, 1]$  et à la fréquence  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ .

En effet (4) et (5) impliquent

$$\left| X_t - \tilde{X}_t(u) \right| \leq K \left\{ \left| \frac{t}{T} - u \right| + \frac{1}{T} \right\} U_t$$

où  $\{U_t\}$  est le processus stationnaire définie par

$$U_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \ell^{-1}(j) |\varepsilon_{t-j}|$$

d'où l'approximation de  $X_{t,T}$  par  $\tilde{X}_t(u)$  autour de  $u = \frac{t}{T}$

## Définition

$$f(u, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha(u, j) \exp(-i\lambda j) \right|^2 \quad (7)$$

densité spectrale, variant au cours, du temps du processus  $X_{t,T}$  au temps  $u \in [0, 1]$  et à la fréquence  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ .

En effet (4) et (5) impliquent

$$\left| X_t - \tilde{X}_t(u) \right| \leq K \left\{ \left| \frac{t}{T} - u \right| + \frac{1}{T} \right\} U_t$$

où  $\{U_t\}$  est le processus stationnaire définie par

$$U_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \ell^{-1}(j) |\varepsilon_{t-j}|$$

d'où l'approximation de  $X_{t,T}$  par  $\tilde{X}_t(u)$  autour de  $u = \frac{t}{T}$

## Définition

$$f(u, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha(u, j) \exp(-i\lambda j) \right|^2 \quad (7)$$

densité spectrale, variant au cours, du temps du processus  $X_{t,T}$  au temps  $u \in [0, 1]$  et à la fréquence  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ .

En effet (4) et (5) impliquent

$$\left| X_t - \tilde{X}_t(u) \right| \leq K \left\{ \left| \frac{t}{T} - u \right| + \frac{1}{T} \right\} U_t$$

où  $\{U_t\}$  est le processus stationnaire définie par

$$U_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \ell^{-1}(j) |\varepsilon_{t-j}|$$

d'où l'approximation de  $X_{t,T}$  par  $\tilde{X}_t(u)$  autour de  $u = \frac{t}{T}$ .



# Exemple

- Un processus TVAR(p),  $a_0(u) = 1$  (TVAR : Time Varying AR)

$$\sum_{j=0}^p a_j\left(\frac{t}{T}\right) X_{t-j,T} = \sigma\left(\frac{t}{T}\right) \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \text{ iid}$$

- Densité spectrale :

$$f(u, \lambda) = \frac{\sigma^2(u)}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^p a_j(u) \exp(i\lambda j) \right|^{-2}$$

# Exemple

- Un processus TVAR(p),  $a_0(u) = 1$  (TVAR : Time Varying AR)

$$\sum_{j=0}^p a_j\left(\frac{t}{T}\right) X_{t-j,T} = \sigma\left(\frac{t}{T}\right) \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \text{ iid}$$

- Densité spectrale :

$$f(u, \lambda) = \frac{\sigma^2(u)}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^p a_j(u) \exp(i\lambda j) \right|^{-2}$$

# Exemple

- Simulation d'un TVAR(2)

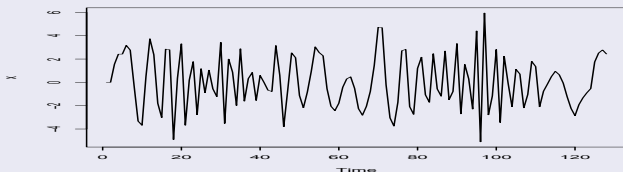
T=128 réalisations d'un AR variant au cours du temps



# Exemple

- Simulation d'un TVAR(2)

T=128 réalisations d'un AR variant au cours du temps



## Estimateur non paramétrique

- Nous considérons ici l'estimateur à noyau,  $\hat{f}_N(u, \lambda)$ , défini par

$$\hat{f}_N(u, \lambda) = \frac{1}{Nh_N} \sum_{k=-N_1}^{N_1} K\left(\frac{\lambda - \lambda_k}{h_N}\right) I_N(u, \lambda_k). \quad (8)$$

- où

$$I_N(u, \lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{s=0}^N X_{[uT] - \frac{N}{2} + s + 1, T} e^{-i\lambda s} \right|^2, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi,$$

représente le périodogramme des sous-échantillons.

$K(\cdot)$  est un noyau régulier, symétrique et positif

$N$  la taille du sous-échantillon et  $N_1$  représente le plus grand entier inférieur ou égal à  $\frac{N}{2}$ .

# Estimateur non paramétrique

- Nous considérons ici l'estimateur à noyau,  $\hat{f}_N(u, \lambda)$ , défini par

$$\hat{f}_N(u, \lambda) = \frac{1}{Nh_N} \sum_{k=-N_1}^{N_1} K\left(\frac{\lambda - \lambda_k}{h_N}\right) I_N(u, \lambda_k). \quad (8)$$

- où

$$I_N(u, \lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{s=0}^N X_{[uT] - \frac{N}{2} + s + 1, T} e^{-i\lambda s} \right|^2, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi,$$

représente le périodogramme des sous-échantillons.

$K(\cdot)$  est un noyau régulier, symétrique et positif

$N$  la taille du sous-échantillon et  $N_1$  représente le plus grand entier inférieur ou égal à  $\frac{N}{2}$ .

# Propriétés de l'estimateur

Les propriétés asymptotiques de l'estimateur  $\hat{f}_N(u, \lambda)$  sont étudiées par, Dahlhaus (1996b) et Sergides et Paparoditis (2007).

# Propriétés de l'estimateur

Les propriétés asymptotiques de l'estimateur  $\hat{f}_N(u, \lambda)$  sont étudiées par, Dahlhaus (1996b) et Sergides et Paparoditis (2007).



- Dans cette section nous définissons l'estimateur *EMDH* dans le cadre de la locale stationnarité et discutons du comportement.
- Considerons un échantillon  $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$  provenant d'un processus localement stationnaire  $(X_{t,T})$  défini en (3).
- Stationnarité : Estimation à l'aide de l'estimateur non paramétrique à noyau.
- Stationnarité locale : Adaptation de cette estimation avec la version locale de l'estimation non paramétrique à noyau.  
Une approche de la densité de Kernel dans la stationnarité globale.

- Dans cette section nous définissons l'estimateur *EMDH* dans le cadre de la locale stationnarité et discutons du comportement.
- Considerons un échantillon  $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$  provenant d'un processus localement stationnaire  $(X_{t,T})$  défini en (3).
- Stationnarité : Estimation à l'aide de l'estimateur non paramétrique à noyau.
- Stationnarité locale : Adaptation de cette estimation avec la version locale de l'estimation non paramétrique à noyau.  
Une approche de la densité de Kernel dans la stationnarité globale.

- Dans cette section nous définissons l'estimateur *EMDH* dans le cadre de la locale stationnarité et discutons du comportement.
- Considerons un échantillon  $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$  provenant d'un processus localement stationnaire  $(X_{t,T})$  défini en (3).
- Stationnarité : Estimation à l'aide de l'estimateur non paramétrique à noyau.
- Stationnarité locale : Adaptation de cette estimation avec la version locale de l'estimation non paramétrique à noyau.  
Une approche de la densité de Kernel dans la stationnarité globale.

- Dans cette section nous définissons l'estimateur *EMDH* dans le cadre de la locale stationnarité et discutons du comportement.
- Considerons un échantillon  $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$  provenant d'un processus localement stationnaire  $(X_{t,T})$  défini en (3).
- Stationnarité : Estimation à l'aide de l'estimateur non paramétrique à noyau.
- Stationnarité locale : Adaptation de cette estimation avec la version locale de l'estimation non paramétrique à noyau.  
Une approche de la densité de Kernel dans la stationnarité globale.

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Processus localement stationnaires
- 3 Estimation de la densité spectrale
- 4 Estimateur du minimum de distance de Hellinger sous la stationnarité locale**
  - Définition de l'estimateur
  - Propriétés asymptotiques de l'estimateur
- 5 Simulations

- Généralisation : on pose

$$d_T^{HD}(f_\theta, f_N) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left\| \left\| f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) - f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) \right\|_2 \right\|_2, \quad (9)$$

autrement dit, la distance de Hellinger entre  $f_\theta$  et  $f_N$  est la moyenne des distances au cours du temps entre  $f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$  et  $f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$

où  $f_\theta(u_j, \cdot)$  et  $f_N(u_j, \cdot)$  sont respectivement la densité spectrale paramétrique locale et la densité spectrale non paramétrique local du processus dans le  $j^{\text{eme}}$  segment et  $M$  est le nombre de segments dépendant de  $N$ .

- Alors la valeur  $\hat{\theta}_T^{DH}$ , basée sur  $X_{1,T}, X_{2,T}, \dots, X_{T,T}$ , est telle que

$$\hat{\theta}_T^{HD} = \arg \min_{\theta \in \Theta} d_T^{HD}(f_\theta, \hat{f}_N). \quad (10)$$

- Généralisation : on pose

$$d_T^{HD}(f_\theta, f_N) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left\| \left\| f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) - f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) \right\|_2 \right\|_2, \quad (9)$$

autrement dit, la distance de Hellinger entre  $f_\theta$  et  $f_N$  est la moyenne des distances au cours du temps entre  $f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$  et  $f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$

où  $f_\theta(u_j, \cdot)$  et  $f_N(u_j, \cdot)$  sont respectivement la densité spectrale paramétrique locale et la densité spectrale non paramétrique local du processus dans le  $j^{\text{eme}}$  segment et  $M$  est le nombre de segments dépendant de  $N$ .

- Alors la valeur  $\hat{\theta}_T^{DH}$ , basée sur  $X_{1,T}, X_{2,T}, \dots, X_{T,T}$ , est telle que

$$\hat{\theta}_T^{HD} = \arg \min_{\theta \in \Theta} d_T^{HD}(f_\theta, \hat{f}_N). \quad (10)$$

- Généralisation : on pose

$$d_T^{HD}(f_\theta, f_N) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left\| \left\| f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) - f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) \right\|_2 \right\|_2, \quad (9)$$

autrement dit, la distance de Hellinger entre  $f_\theta$  et  $f_N$  est la moyenne des distances au cours du temps entre  $f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$  et  $f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$

où  $f_\theta(u_j, \cdot)$  et  $f_N(u_j, \cdot)$  sont respectivement la densité spectrale paramétrique locale et la densité spectrale non paramétrique local du processus dans le  $j^{eme}$  segment et  $M$  est le nombre de segments dépendant de  $N$ .

- Alors la valeur  $\hat{\theta}_T^{DH}$ , basée sur  $X_{1,T}, X_{2,T}, \dots, X_{T,T}$ , est telle que

$$\hat{\theta}_T^{HD} = \arg \min_{\theta \in \Theta} d_T^{HD}(f_\theta, \hat{f}_N). \quad (10)$$



- Généralisation : on pose

$$d_T^{HD}(f_\theta, f_N) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left\| \left\| f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) - f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot) \right\|_2 \right\|_2, \quad (9)$$

autrement dit, la distance de Hellinger entre  $f_\theta$  et  $f_N$  est la moyenne des distances au cours du temps entre  $f_\theta^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$  et  $f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \cdot)$

où  $f_\theta(u_j, \cdot)$  et  $f_N(u_j, \cdot)$  sont respectivement la densité spectrale paramétrique locale et la densité spectrale non paramétrique local du processus dans le  $j^{\text{eme}}$  segment et  $M$  est le nombre de segments dépendant de  $N$ .

- Alors la valeur  $\hat{\theta}_T^{DH}$ , basée sur  $X_{1,T}, X_{2,T}, \dots, X_{T,T}$ , est telle que

$$\hat{\theta}_T^{HD} = \arg \min_{\theta \in \Theta} d_T^{HD}(f_\theta, \hat{f}_N). \quad (10)$$

- Soit  $f(u, \lambda)$  la vraie densité spectrale du processus  $(X_{t,T})_{t \in \mathbb{Z}}$  et  $f_\theta(u, \lambda) \in \mathcal{F}$  la densité spectrale locale du modèle choisi, on définit alors

$$d^{DH}(f_\theta, f) = \int_0^1 \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f_\theta^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) - f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} du, \quad (11)$$

comme la distance entre le vrai processus avec densité spectrale  $f(u, \lambda)$  et le modèle avec densité spectrale  $f_\theta(u, \lambda)$ .

- La meilleure approximation de la valeur du paramètre de notre classe de modèles est donc

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta \in \Theta} d^{HD}(f_\theta, f).$$

- Soit  $f(u, \lambda)$  la vraie densité spectrale du processus  $(X_{t,T})_{t \in \mathbb{Z}}$  et  $f_\theta(u, \lambda) \in \mathcal{F}$  la densité spectrale locale du modèle choisi, on défini alors

$$d^{DH}(f_\theta, f) = \int_0^1 \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f_\theta^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) - f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} du, \quad (11)$$

comme la distance entre le vrai processus avec densité spectrale  $f(u, \lambda)$  et le modèle avec densité spectrale  $f_\theta(u, \lambda)$ .

- La meilleure approximation de la valeur du paramètre de notre classe de modèles est donc

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta \in \Theta} d^{HD}(f_\theta, f).$$

- Soit  $f(u, \lambda)$  la vraie densité spectrale du processus  $(X_{t,T})_{t \in \mathbb{Z}}$  et  $f_\theta(u, \lambda) \in \mathcal{F}$  la densité spectrale locale du modèle choisi, on définit alors

$$d^{DH}(f_\theta, f) = \int_0^1 \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f_\theta^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) - f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} du, \quad (11)$$

comme la distance entre le vrai processus avec densité spectrale  $f(u, \lambda)$  et le modèle avec densité spectrale  $f_\theta(u, \lambda)$ .

- La meilleure approximation de la valeur du paramètre de notre classe de modèles est donc

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta \in \Theta} d^{HD}(f_\theta, f).$$

- La fonction  $d_T^{DH}(f_\theta, \hat{f}_N) \longleftrightarrow d^{DH}(f_\theta, f)$  intégrale par  $(1/M) \sum_j$  et  $f$  par  $\hat{f}_N$  la densité spectrale exacte non connue  $f$  par l'estimateur nonparamétrique  $\hat{f}_N$ .
- Ainsi, nous supposons que  $d_T^{DH}(f_\theta, \hat{f}_N)$  est une approximation de la distance exacte  $d^{DH}(f_\theta, f)$
- Nous prouvons sous certaines conditions de régularité que  $\hat{\theta}_T^{DH}$  converge vers  $\theta_0$ .

- La fonction  $d_T^{DH}(f_\theta, \hat{f}_N) \longleftrightarrow d^{DH}(f_\theta, f)$  intégrale par  $(1/M) \sum_j$  et  $f$  par  $\hat{f}_N$  la densité spectrale exacte non connue  $f$  par l'estimateur nonparamétrique  $\hat{f}_N$ .
- Ainsi, nous supposons que  $d^{DH}(f_\theta, \hat{f}_N)$  est une approximation de la distance exacte  $d^{DH}(f_\theta, f)$
- Nous prouvons sous certaines conditions de régularité que  $\hat{\theta}_T^{DH}$  converge vers  $\theta_0$ .

- La fonction  $d_T^{DH}(f_\theta, \hat{f}_N) \longleftrightarrow d^{DH}(f_\theta, f)$  intégrale par  $(1/M) \sum_j$  et  $f$  par  $\hat{f}_N$  la densité spectrale exacte non connue  $f$  par l'estimateur nonparamétrique  $\hat{f}_N$ .
- Ainsi, nous supposons que  $d^{DH}(f_\theta, \hat{f}_N)$  est une approximation de la distance exacte  $d^{DH}(f_\theta, f)$
- Nous prouvons sous certaines conditions de régularité que  $\hat{\theta}_T^{DH}$  converge vers  $\theta_0$ .

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Processus localement stationnaires
- 3 Estimation de la densité spectrale
- 4 Estimateur du minimum de distance de Hellinger sous la stationnarité locale**
  - Définition de l'estimateur
  - Propriétés asymptotiques de l'estimateur
- 5 Simulations



- L'établissement de la distribution asymptotique de l'estimateur du MDH est important pour faire des comparaisons théoriques avec d'autres estimateurs et aussi pour faire des approximations inférentielles valides.
- Nous montrons ici la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur MDH.
- Pour l'existence, la continuité et l'unicité, les résultats sont similaires à ceux de Beran (1977).

- L'établissement de la distribution asymptotique de l'estimateur du MDH est important pour faire des comparaisons théoriques avec d'autres estimateurs et aussi pour faire des approximations inférentielles valides.
- Nous montrons ici la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur MDH.
- Pour l'existence, la continuité et l'unicité, les résultats sont similaires à ceux de Beran (1977).

- L'établissement de la distribution asymptotique de l'estimateur du MDH est important pour faire des comparaisons théoriques avec d'autres estimateurs et aussi pour faire des approximations inférentielles valides.
- Nous montrons ici la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur MDH.
- Pour l'existence, la continuité et l'unicité, les résultats sont similaires à ceux de Beran (1977).

# Consistance de l'estimateur

## Théorème

*Supposons que  $f \in \mathcal{G}$  soit la vraie fonction de densité spectrale de  $X_{t,T}$  définie en (3) et que  $I(f)$  soit unique. Alors, sous les hypothèses du Théorème précédent*

$$\hat{\theta}_T^{DH} \longrightarrow I(f) \text{ p.s.}$$

*En particulier, si  $f = f_{\theta_0}$ , alors  $\hat{\theta}_T^{DH} \longrightarrow \theta_0$  p.s.*

# Normalité asymptotique

- Soit  $s_\theta = f_\theta^2$ , supposons pour  $\theta \in \Theta^0$  (intérieur à  $\Theta$ ) que  $s_\theta$  est deux fois différentiable dans  $L_2$ ; c'est à dire, supposons qu'il existe  $\dot{s}_\theta$  et  $\ddot{s}_\theta$  dans  $L_2$  qui satisfont, pour chaque  $\beta$  proche de zéro.

$$s_{\theta+\beta}(u, \lambda) = s_\theta(u, \lambda) + \beta \dot{s}_\theta(u, \lambda) + \beta u_\beta(u, \lambda) \quad (12)$$

et

$$\dot{s}_{\theta+\beta}(u, \lambda) = \dot{s}_\theta(u, \lambda) + \beta \ddot{s}_\theta(u, \lambda) + \beta v_\beta(u, \lambda), \quad (13)$$

où  $u_\beta$  et  $v_\beta$  tendent vers zéro dans  $L_2$  quand  $\beta \rightarrow 0$ .

# Normalité asymptotique

- Soit  $s_\theta = f_\theta^2$ , supposons pour  $\theta \in \Theta^0$  (intérieur à  $\Theta$ ) que  $s_\theta$  est deux fois différentiable dans  $L_2$ ; c'est à dire, supposons qu'il existe  $\dot{s}_\theta$  et  $\ddot{s}_\theta$  dans  $L_2$  qui satisfont, pour chaque  $\beta$  proche de zéro.

$$s_{\theta+\beta}(u, \lambda) = s_\theta(u, \lambda) + \beta \dot{s}_\theta(u, \lambda) + \beta u_\beta(u, \lambda) \quad (12)$$

et

$$\dot{s}_{\theta+\beta}(u, \lambda) = \dot{s}_\theta(u, \lambda) + \beta \ddot{s}_\theta(u, \lambda) + \beta v_\beta(u, \lambda), \quad (13)$$

où  $u_\beta$  et  $v_\beta$  tendent vers zéro dans  $L_2$  quand  $\beta \rightarrow 0$ .

# Normalité asymptotique

## Théorème

Supposons que (12) et (13) soient réalisées pour  $\theta \in \Theta^0$ , pour  $f \in \mathcal{G}$ ,  $I(f)$  existe, est unique, et  $I(f) \in \Theta^0$ . Supposons aussi que

$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{s}_{I(f)}(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du > 0$  et que la fonctionnelle  $I$  est

continue en  $f$  dans la topologie de Hellinger. Alors pour toute suite de densités spectrales  $\{f_N\}$  convergeant vers  $f$  dans la métrique de Hellinger,

$$I(f_N) = I(f) + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \rho_f(u_j, \lambda) f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \lambda) d\lambda - \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \rho_f(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du \quad (14)$$

$$+ a_N \left( \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \dot{s}_{I(f)}(u_j, \lambda) \hat{f}_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \lambda) d\lambda - \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \dot{s}_{I(f)}(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du \right),$$

# Normalité asymptotique

## Théorème

Supposons que (12) et (13) soient réalisées pour  $\theta \in \Theta^0$ , pour  $f \in \mathcal{G}$ ,  $I(f)$  existe, est unique, et  $I(f) \in \Theta^0$ . Supposons aussi que

$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{s}_{I(f)}(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du > 0$  et que la fonctionnelle  $I$  est

continue en  $f$  dans la topologie de Hellinger. Alors pour toute suite de densités spectrales  $\{f_N\}$  convergeant vers  $f$  dans la métrique de Hellinger,

$$I(f_N) = I(f) + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \rho_f(u_j, \lambda) f_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \lambda) d\lambda - \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \rho_f(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du \quad (14)$$

$$+ a_N \left( \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \dot{s}_{I(f)}(u_j, \lambda) \hat{f}_N^{\frac{1}{2}}(u_j, \lambda) d\lambda - \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \dot{s}_{I(f)}(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du \right),$$



# Normalité asymptotique

- où

$$\rho_f(u, \lambda) = - \frac{\dot{s}_{I(f)}(u, \lambda)}{\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{s}_{I(f)}(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du}$$

et  $a_N$  tend vers zéro quand  $N \rightarrow \infty$ .

- En utilisant la représentation (14), nous montrons par le théorème ci-après, que l'EMDH  $\hat{\theta}_T^{DH} = I(\hat{f}_N)$  suit asymptotiquement une distribution normale.

# Normalité asymptotique

- où

$$\rho_f(u, \lambda) = - \frac{\dot{s}_{I(f)}(u, \lambda)}{\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{s}_{I(f)}(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du}$$

et  $a_N$  tend vers zéro quand  $N \rightarrow \infty$ .

- En utilisant la représentation (14), nous montrons par le théorème ci-après, que l'EMDH  $\hat{\theta}_T^{DH} = I(\hat{f}_N)$  suit asymptotiquement une distribution normale.

# Normalité asymptotique

- où

$$\rho_f(u, \lambda) = - \frac{\dot{s}_{I(f)}(u, \lambda)}{\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{s}_{I(f)}(u, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u, \lambda) d\lambda du}$$

et  $a_N$  tend vers zéro quand  $N \rightarrow \infty$ .

- En utilisant la représentation (14), nous montrons par le théorème ci-après, que l'EMDH  $\hat{\theta}_T^{DH} = I(\hat{f}_N)$  suit asymptotiquement une distribution normale.

# Normalité asymptotique

## Théorème

Supposons  $f \in \mathcal{G}$  est la vraie densité spectrale de  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  définie en (3). Supposons que (12) et (13) sont réalisées et  $\rho$  a un support compact  $K = [-\pi, \pi]$  sur lequel il est continu. Supposons  $f > 0$  sur  $K$ ;  $f$  est deux fois absolument continue et  $f''$  est bornée par rapport à  $\lambda$ . Supposons que  $I(f)$  existe, est unique et  $J(f) \in \Theta^0$  (intérieur de  $\Theta$ ),  $\int \ddot{s}_{I(f)}(u_j, \lambda) f^{\frac{1}{2}}(u_j, \lambda) d\lambda > 0$  pour tout  $j = 1, \dots, M$ , et  $\dot{s}_{I(f)} \in L_2$ . Alors, pour toute suite  $(h_N)$  telle que  $h_N \rightarrow 0$ ,  $Nh_N^3 \rightarrow \infty$  et  $T^{1/2}h_N^2 \rightarrow 0$  et sous les hypothèses du Théorème précédent,

$$\sqrt{T}(I(\hat{f}_N) - I(f)) \longrightarrow \mathcal{N}(0, V) \quad (15)$$

# Normalité asymptotique

où

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \rho(u, -\lambda) \rho(u, \lambda) f(u, \lambda) d\lambda du + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \rho^2(u, -\lambda) f(u, \lambda) d\lambda du$$

En particulier, si  $f = f_{\theta}$ ,  $I(f) = \theta_0$  est équivalent à  $\theta$  et donc

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_T^{DH} - \theta) \longrightarrow \mathcal{N}(0, V) \quad (16)$$

où

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\dot{s}_{\theta}(u, -\lambda) \dot{s}_{\theta}(u, \lambda)} s_{\theta}(u, \lambda) d\lambda du + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\dot{s}_{\theta}^2(u, -\lambda)} s_{\theta}(u, \lambda) d\lambda du$$

# Simulation

- Nous présentons ici un exemple de simulation pour l'estimation de  $\hat{\theta}_T^{DH}$  d'un processus AR(2) localement stationnaire

$$X_{t,T} + a_1\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-1,T} + a_2\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-2,T} = \sigma\left(\frac{t}{T}\right)\varepsilon_t \quad (17)$$

où les  $\varepsilon_t$  sont des v.a. i.i.d gaussiennes de moyenne zéro et de variance 1. Les paramètres autorégressifs  $a_i = a_i\left(\frac{t}{T}\right)$ ,  $i = 1, 2$  sont des fonctions qui changent au cours du temps.

- Comme paramètres nous choisissons  $a_1(u) = -1.8 \cos(1.5 - \cos 4\pi u)$ , i.e.  $a_1(u)$  varie au cours du temps,  $a_2(u) = 0.832$  pour tout  $0 \leq u \leq 1$ , i.e.  $a_2(u)$  est constant à travers le temps,  $\sigma(u) = 1.0$ . Nous générons  $T = 128$  observations provenant du modèle (17).

# Simulation

- Nous présentons ici un exemple de simulation pour l'estimation de  $\hat{\theta}_T^{DH}$  d'un processus AR(2) localement stationnaire

$$X_{t,T} + a_1\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-1,T} + a_2\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-2,T} = \sigma\left(\frac{t}{T}\right)\varepsilon_t \quad (17)$$

où les  $\varepsilon_t$  sont des v.a. i.i.d gaussiennes de moyenne zéro et de variance 1. Les paramètres autorégressifs  $a_i = a_i\left(\frac{t}{T}\right)$ ,  $i = 1, 2$  sont des fonctions qui changent au cours du temps.

- Comme paramètres nous choisissons  $a_1(u) = -1.8 \cos(1.5 - \cos 4\pi u)$ , i.e.  $a_1(u)$  varie au cours du temps,  $a_2(u) = 0.832$  pour tout  $0 \leq u \leq 1$ , i.e.  $a_2(u)$  est constant à travers le temps,  $\sigma(u) = 1.0$ . Nous générons  $T = 128$  observations provenant du modèle (17).

# Simulation

- Nous présentons ici un exemple de simulation pour l'estimation de  $\hat{\theta}_T^{DH}$  d'un processus AR(2) localement stationnaire

$$X_{t,T} + a_1\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-1,T} + a_2\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-2,T} = \sigma\left(\frac{t}{T}\right)\varepsilon_t \quad (17)$$

où les  $\varepsilon_t$  sont des v.a. i.i.d gaussiennes de moyenne zéro et de variance 1. Les paramètres autorégressifs  $a_i = a_i\left(\frac{t}{T}\right)$ ,  $i = 1, 2$  sont des fonctions qui changent au cours du temps.

- Comme paramètres nous choisissons  $a_1(u) = -1.8 \cos(1.5 - \cos 4\pi u)$ , i.e.  $a_1(u)$  varie au cours du temps,  $a_2(u) = 0.832$  pour tout  $0 \leq u \leq 1$ , i.e.  $a_2(u)$  est constant à travers le temps,  $\sigma(u) = 1.0$ . Nous générons  $T = 128$  observations provenant du modèle (17).



# Simulation

- On génère ainsi un processus  $X_{t,T}$  localement stationnaire et sa densité spectrale dépendant du temps comme dans (7) est

$$f(u, \lambda) = \frac{\sigma^2(u)}{2\pi} \left| 1 + \sum_{j=1}^2 a_j(u) \exp(i\lambda j) \right|^{-2} = f_{\theta(u)}(\lambda).$$

- Estimation à partir des données générées du paramètre  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$  tels que  $a_1(u) = -\theta_1 \cos(\theta_2 - \cos(4\pi u))$ ,  $a_2(u) = \theta_3$  and  $\sigma^2(u) = \theta_4$ . L'estimateur de la densité spectrale du noyau définie par (8) est utilisé. Pour calculer le périodogramme, nous choisissons  $S = 2$ ,  $N = 16$  (i.e.,  $M = 57$ ). Pour le choix de la fonction du noyau dans  $\hat{f}_N$ , nous utilisons la densité de la distribution de  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

# Simulation

- On génère ainsi un processus  $X_{t,T}$  localement stationnaire et sa densité spectrale dépendant du temps comme dans (7) est

$$f(u, \lambda) = \frac{\sigma^2(u)}{2\pi} \left| 1 + \sum_{j=1}^2 a_j(u) \exp(i\lambda j) \right|^{-2} = f_{\theta(u)}(\lambda).$$

- Estimation à partir des données générées du paramètre  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$  tels que  $a_1(u) = -\theta_1 \cos(\theta_2 - \cos(4\pi u))$ ,  $a_2(u) = \theta_3$  and  $\sigma^2(u) = \theta_4$ . L'estimateur de la densité spectrale du noyau définie par (8) est utilisé. Pour calculer le périodogramme, nous choisissons  $S = 2$ ,  $N = 16$  (i.e.,  $M = 57$ ). Pour le choix de la fonction du noyau dans  $\hat{f}_N$ , nous utilisons la densité de la distribution de  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

# Simulation

- Choix de la largeur de la fenêtre :  
→ Utilisation de l'erreur moyenne quadratique intégrée

$$MISE(u, h) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E} \left( \widehat{f}_N(u, \lambda) - f(u, \lambda) \right)^2 \pi(u, \lambda) d\lambda du$$

$\pi$  la fonction de poids est supposée connue et nulle en dehors de  $[-\pi, \pi] \times [0, 1]$ .

- Sélectionner  $h$  minimisant la  $MISE$ ,  $f$  inconnue  $\implies$  Estimation de la  $MISE$  en adoptant la méthode de la validation croisée (Rudemo (1982) et Bowman (1984)). On considère l'erreur quadratique intégrée "Integrated square error" ISE définie par :

$$ISE(u, h) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left( \widehat{f}_N(u, \lambda) - f(u, \lambda) \right)^2 \pi(u, \lambda) d\lambda du$$

# Simulation

- Choix de la largeur de la fenêtre :  
→ Utilisation de l'erreur moyenne quadratique intégrée

$$MISE(u, h) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E} \left( \widehat{f}_N(u, \lambda) - f(u, \lambda) \right)^2 \pi(u, \lambda) d\lambda du$$

$\pi$  la fonction de poids est supposée connue et nulle en dehors de  $[-\pi, \pi] \times [0, 1]$ .

- Sélectionner  $h$  minimisant la  $MISE$ ,  $f$  inconnue  $\implies$  Estimation de la  $MISE$  en adoptant la méthode de la validation croisée (Rudemo (1982) et Bowman (1984)). On considère l'erreur quadratique intégrée "Integrated square error" ISE définie par :

$$ISE(u, h) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left( \widehat{f}_N(u, \lambda) - f(u, \lambda) \right)^2 \pi(u, \lambda) d\lambda du$$

# Simulation

- Approximation de  $ISE$  par le critère  $CV$ , Grégoire (1993), défini par :

$$CV(h, u) = CV_1(h, u) + \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f^2(u, \lambda) \pi(u, \lambda) d\lambda du$$

- où

$$CV_1(h, u) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f_N^2(u, \lambda) \pi(u, \lambda) d\lambda du - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{\bar{N}} \int_0^1 f_N^j(u, \lambda_j) I_N(u, \lambda_j)$$

$$\text{où } \lambda_j = \frac{2\pi j}{N}, \bar{N} = \left[ \frac{N-1}{2} \right] \text{ et } f_N^j(u, \lambda) = \frac{1}{Nh_N} \sum_{k=-N_1}^{N_1} K\left(\frac{\lambda - \lambda_k}{h_N}\right) I_N^j(u, \lambda_k)$$

$$\pi(u, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{sur } [0, 2\pi] \times [0, 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

# Simulation

- Approximation de  $ISE$  par le critère  $CV$ , Grégoire (1993), défini par :

$$CV(h, u) = CV_1(h, u) + \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f^2(u, \lambda) \pi(u, \lambda) d\lambda du$$

- où

$$CV_1(h, u) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f_N^2(u, \lambda) \pi(u, \lambda) d\lambda du - \frac{2}{\bar{N}} \sum_{j=1}^{\bar{N}} \int_0^1 f_N^j(u, \lambda_j) I_N(u, \lambda_j)$$

$$\text{où } \lambda_j = \frac{2\pi j}{\bar{N}}, \bar{N} = \left[ \frac{N-1}{2} \right] \text{ et } f_N^j(u, \lambda) = \frac{1}{Nh_N} \sum_{k=-N_1}^{N_1} K\left(\frac{\lambda - \lambda_k}{h_N}\right) f_N^j(u, \lambda_k)$$

$$\pi(u, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{sur } [0, 2\pi] \times [0, 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

# Simulation

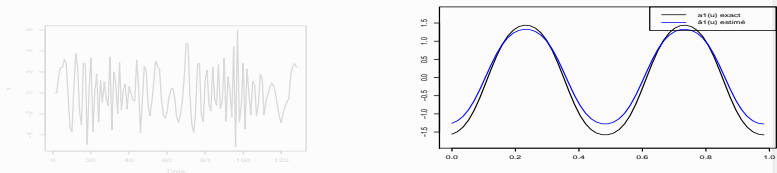
- Ainsi, la largeur de la fenêtre spectrale sera choisie au point  $h$  minimisant le critère  $CV(h)$  :

$$\hat{h} = \arg \min_h CV(u, h) = \arg \min_h CV_1(u, h)$$

# Simulation

Les résultats des données simulées sont présentées en Figure 2.

FIG. 2 – Réalisations d'un time varying AR-model et Coefficient  $a_1(u)$  exact et estimé variant au cours du temps

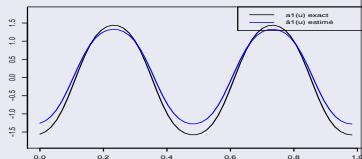
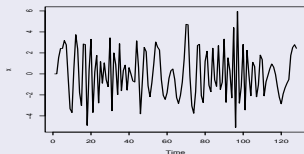




# Simulation

Les résultats des données simulées sont présentées en Figure 2.

FIG. 2 – Réalisations d'un time varying AR-model et Coefficient  $a_1(u)$  exact et estimé variant au cours du temps



# Simulation

- Méthode de Monte Carlo avec 3000 réplifications :  $\hat{a}_1(u)$  in Figure 2,  $\hat{a}_2(u) = 0.819$ , et  $\hat{\sigma}(u) = 1.28$
- **Robustesse** : Nouvel estimateur pour  $\theta$  de  $f_\theta$ . L'estimateur pour  $I(f)$  est défini par

$$d_H(f_{I(\hat{f}_{\alpha,N})}, f_\alpha) = \min_{t \in \Theta} d_H(f_t, \hat{f}_{\alpha,N})$$

où  $\hat{f}_{\alpha,N} = (1 - \alpha)\hat{f}_N + \alpha\delta_{[0,1]}$  est la densité contaminée et  $\delta_{[0,1]}$  représente la densité uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$  et  $\alpha \in [0, 1]$ .

- Dans l'estimation par le MDH des coefficients du modèle (17), nous remplaçons  $\hat{f}_N$  par  $\hat{f}_{\alpha,N}$  pour six valeurs particulières de  $\alpha$ .
- Une application de Monte Carlo  $\implies$  la Table suivante pour les valeurs de  $\hat{a}_2(u)$  et  $\hat{\sigma}(u)$  et les figures suivantes pour  $\hat{a}_1(u)$ .

# Simulation

- Méthode de Monte Carlo avec 3000 réplifications :  $\hat{a}_1(u)$  in Figure 2,  $\hat{a}_2(u) = 0.819$ , et  $\hat{\sigma}(u) = 1.28$
- **Robustesse** : Nouvel estimateur pour  $\theta$  de  $f_\theta$ . L'estimateur pour  $I(f)$  est défini par

$$d_H(f_{I(\hat{f}_{\alpha,N})}, f_\alpha) = \min_{t \in \Theta} d_H(f_t, \hat{f}_{\alpha,N})$$

où  $\hat{f}_{\alpha,N} = (1 - \alpha)\hat{f}_N + \alpha\delta_{[0,1]}$  est la densité contaminée et  $\delta_{[0,1]}$  représente la densité uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$  et  $\alpha \in [0, 1]$ .

- Dans l'estimation par le MDH des coefficients du modèle (17), nous remplaçons  $\hat{f}_N$  par  $\hat{f}_{\alpha,N}$  pour six valeurs particulières de  $\alpha$ .
- Une application de Monte Carlo  $\implies$  la Table suivante pour les valeurs de  $\hat{a}_2(u)$  et  $\hat{\sigma}(u)$  et les figures suivantes pour  $\hat{a}_1(u)$ .

# Simulation

- Méthode de Monte Carlo avec 3000 réplifications :  $\hat{a}_1(u)$  in Figure 2,  $\hat{a}_2(u) = 0.819$ , et  $\hat{\sigma}(u) = 1.28$
- **Robustesse** : Nouvel estimateur pour  $\theta$  de  $f_\theta$ . L'estimateur pour  $I(f)$  est défini par

$$d_H(f_{I(\hat{f}_{\alpha,N})}, f_\alpha) = \min_{t \in \Theta} d_H(f_t, \hat{f}_{\alpha,N})$$

où  $\hat{f}_{\alpha,N} = (1 - \alpha)\hat{f}_N + \alpha\delta_{[0,1]}$  est la densité contaminée et  $\delta_{[0,1]}$  représente la densité uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$  et  $\alpha \in [0, 1]$ .

- Dans l'estimation par le MDH des coefficients du modèle (17), nous remplaçons  $\hat{f}_N$  par  $\hat{f}_{\alpha,N}$  pour six valeurs particulières de  $\alpha$ .
- Une application de Monte Carlo  $\implies$  la Table suivante pour les valeurs de  $\hat{a}_2(u)$  et  $\hat{\sigma}(u)$  et les figures suivantes pour  $\hat{a}_1(u)$ .

# Simulation

- Méthode de Monte Carlo avec 3000 réplifications :  $\hat{a}_1(u)$  in Figure 2,  $\hat{a}_2(u) = 0.819$ , et  $\hat{\sigma}(u) = 1.28$
- **Robustesse** : Nouvel estimateur pour  $\theta$  de  $f_\theta$ . L'estimateur pour  $I(f)$  est défini par

$$d_H(f_{I(\hat{f}_{\alpha,N})}, f_\alpha) = \min_{t \in \Theta} d_H(f_t, \hat{f}_{\alpha,N})$$

où  $\hat{f}_{\alpha,N} = (1 - \alpha)\hat{f}_N + \alpha\delta_{[0,1]}$  est la densité contaminée et  $\delta_{[0,1]}$  représente la densité uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$  et  $\alpha \in [0, 1]$ .

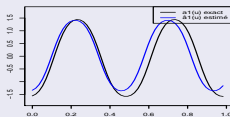
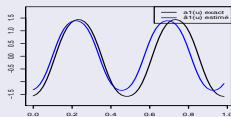
- Dans l'estimation par le MDH des coefficients du modèle (17), nous remplaçons  $\hat{f}_N$  par  $\hat{f}_{\alpha,N}$  pour six valeurs particulières de  $\alpha$ .
- Une application de Monte Carlo  $\implies$  la Table suivante pour les valeurs de  $\hat{a}_2(u)$  et  $\hat{\sigma}(u)$  et les figures suivantes pour  $\hat{a}_1(u)$ .

# Simulation

Table 1

$\alpha$	$\hat{a}_2(u)$	$\hat{\sigma}(u)$
0.05	0.805	1.007
0.1	0.821	1.019
0.2	0.737	0.986
0.3	0.818	0.962
0.4	0.831	1.296
0.5	0.826	1.103

## Simulation

 $\alpha = 0.05$  $\alpha = 0.1$ 

1–Coefficient  $a_1(u)$  exact et estimé variant au cours du temps.

FIG.

## Simulation

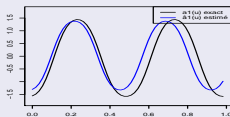
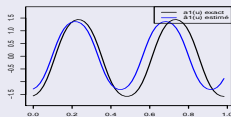
 $\alpha = 0.2$  $\alpha = 0.3$ 

FIG.

2–Coefficient  $a_1(u)$  exact et estimé variant au cours du temps.



## Simulation

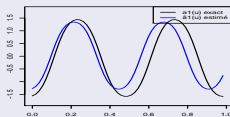
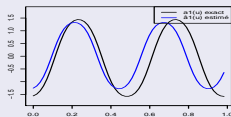




 $\alpha = 0.4$  $\alpha = 0.5$ 






FIG.

3—Coéfficient  $a_1(u)$  exact et estimé variant au cours du temps.

## Quelques éléments bibliographiques

-  Beran, R. J. (1977). Minimum Hellinger Distance Estimates for Parametric Models, *Ann. Stat.*, **5**, 445-463.
-  Dahlhaus, R. (1996b). Asymptotic statistical inference for nonstationary process with evolutionary spectra. *In Athens Conference on Applied Probability and Time Series Analysis*, (P. M. Robinson and M. Rosenblatt, eds) **2**. Springer, New York, pp. 145–159.
-  Dahlhaus, R. (1997). Fitting time Series Models to Nonstationary Processes. *The Annals of Statistics*, **25**, 1-37.
-  Hili, O. (1995). On the estimation of nonlinear time series models, *Stoch. Stoch. Rep.* **52**, 207–226.

## Quelques éléments bibliographiques

-  Hosoya, Y. (1974). Estimation problems on stationary time-series models. Ph.D. Thesis Yale University.
-  Ludeña, C. (2000). Parametric estimation for Gaussian longrange dependent processes based on the log-periodogram. Bernoulli 6(4), 2000, 709-728.
-  Sergides, M. and Paparoditis, E. (2007). Bootstrapping the local periodogram of locally stationary processes. Journal of Time Series Analysis, Vol. 29, Issue 2, pp. 264-299.
-  Stărică, C. and Granger, C.W.J. (2005). Nonstationarities in stock return, The review of Economics and Statistics, 81, 553-574.
-  Taniguchi, M. (1979). On estimation of parameters of Gaussian Stationary Processes. J. Appl. Prob., 16, 575-591.

**Merci pour votre attention !**