

Global analysis of a deterministic and stochastic nonlinear SIRS epidemic model with saturated incidence rate

Gérard KANGA

gerardkanga@yahoo.fr

Université Félix Houphouët-Boigny

Abidjan COTE D'IVOIRE

Ecole de recherche CIMPA 17-28 Mars 2014

Analyse et Probabilités

18 Mars 2014

PLAN

- Introduction

PLAN

- Introduction
- Résultats préliminaires

PLAN

- Introduction
- Résultats préliminaires
- Etude du modèle dans le cas déterministe

PLAN

- Introduction
- Résultats préliminaires
- Etude du modèle dans le cas déterministe
- Etude du modèle avec perturbation aléatoire

PLAN

- Introduction
- Résultats préliminaires
- Etude du modèle dans le cas déterministe
- Etude du modèle avec perturbation aléatoire
- Conclusion et perspectives

PLAN

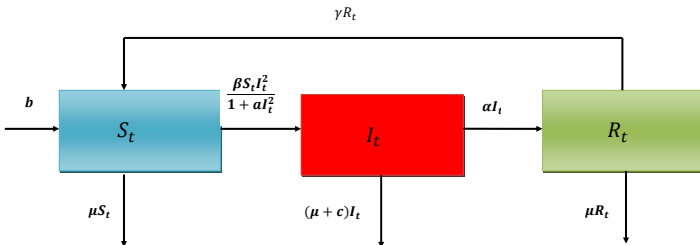
- 1 **Introduction**
- 2 **Résultats préliminaires**
- 3 **Etude du modèle dans le cas déterministe**
 - Recherche des états d'équilibre
 - Etude de la stabilité de l'état d'équilibre libre
- 4 **Etude du modèle SIRS avec perturbation aléatoire**
 - Analyse de la solution globale du système
 - Analyse de la stabilité exponentielle du D.F.E
 - Convergence exponentielle presque sûre
- 5 **Conclusion et perspectives**

Introduction

On considère un modèle épidémiologique *SIRS* compartimenté en 3 classes d'individus.

- La classe des susceptibles *S*.
- La classe des infectés *I*.
- La classe des retirés *R*.

Diagramme de transfert d'un modèle épidémiologique SIRS



- b est le nombre d'individus entrant dans la population des susceptibles par unité de temps;
- μ le taux de décès naturel;
- c le taux de décès dû à la maladie;
- β est le coefficient d'infection;
- α est le taux de guérison des infectés;
- γ est le taux avec lequel un individu guéri perd son immunité et redevient susceptible;
- a est un coefficient qui permet de mesurer l'effet d'inhibition c'est le ralentissement des nouvelles infections dû à une proportion très élevée des personnes infectées dans la population.
Tous ces paramètres sont positifs.

Ces flux instantanés d'individus sont traduits par le système dynamique autonome suivant:

Système du modèle

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_t}{dt} = b - \mu S_t - \frac{\beta S_t I_t^2}{1 + a I_t^2} + \gamma R_t \\ \frac{dI_t}{dt} = -(\mu + c + \alpha) I_t + \frac{\beta S_t I_t^2}{1 + a I_t^2} \\ \frac{dR_t}{dt} = -(\mu + \gamma) R_t + \alpha I_t \end{array} \right. \quad (1)$$

Objectifs de l'étude

- Rechercher des **états d'équilibre** c'est à dire des trajectoires constantes par rapport au temps;

Objectifs de l'étude

- Rechercher des **états d'équilibre** c'est à dire des trajectoires constantes par rapport au temps;
- Etude de la **stabilité** de ces états d'équilibre;

Objectifs de l'étude

- Rechercher des **états d'équilibre** c'est à dire des trajectoires constantes par rapport au temps;
- Etude de la **stabilité** de ces états d'équilibre;
- L'état d'**équilibre libre** (sans maladie) (*D.F.E*) dont la stabilité signifie qu'à terme, la maladie va **disparaître**;

Objectifs de l'étude

- Rechercher des **états d'équilibre** c'est à dire des trajectoires constantes par rapport au temps;
- Etude de la **stabilité** de ces états d'équilibre;
- L'état d'**équilibre libre** (sans maladie) (*D.F.E*) dont la stabilité signifie qu'à terme, la maladie va **disparaître**;
- L'état d'**équilibre endémique** (avec maladie) (*D.E.E*) dont la stabilité signifie qu'à terme, la maladie va **persister**.

La stabilité des états d'équilibre dépend:

- des paramètres du modèle,

La stabilité des états d'équilibre dépend:

- des paramètres du modèle,
- du **taux de reproduction de base** \mathcal{R}_0 ,

Si $\mathcal{R}_0 < 1$ la maladie a tendance à disparaître, et si $\mathcal{R}_0 > 1$ la maladie a tendance à persister,

La stabilité des états d'équilibre dépend:

- des paramètres du modèle,
- du **taux de reproduction de base** \mathcal{R}_0 ,
Si $\mathcal{R}_0 < 1$ la maladie a tendance à disparaître, et si $\mathcal{R}_0 > 1$ la maladie a tendance à persister,
- du **taux d'incidence** $\phi(S, I)$
En 2002, Van Den Driessche et Watmough ont montré que le taux de reproduction de base pouvait être calculé par

$$\mathcal{R}_0 = \frac{1}{\mu + c + \alpha} \left. \frac{\partial \phi(S, I)}{\partial I} \right|_{DFE}$$

- Les premières investigations sur les taux d'incidence se sont limitées aux modèles linéaires $\phi(S, I) = \beta SI$ (Kermack et McKendrick, 1927);
- Les premiers modèles non linéaires sont apparus en 1978 (Capasso et Serio, 1978): Apparition des taux d'incidence saturés qui traduisent un ralentissement des nouvelles infections dû une proportion élevée des infectés dans la population. Leur modèle était basé sur le taux d'incidence $\phi(S, I) = \frac{\beta SI}{1+aI}$;
- Plusieurs auteurs se sont intéressés aux modèles non linéaires de la forme $\frac{\beta SI^p}{1+aI^q}$ (Liu et Levin, 1986; Hethcote, 1989),
- En 2010, A. Lahrouz, L. Omari, D. Kiouach proposent un modèle SIRS avec le taux d'incidence $\frac{\beta SI}{1+aI}$. Ils ont établi des résultats de stabilité aussi bien dans le cas déterministe que dans le cas stochastique.

Motivations

- En 2002, S. Ruan et W. Wang proposent un modèle SIRS avec le taux d'incidence $\frac{\beta SI^p}{1+aI^2}$ qu'ils étudient pour une population constante dans le temps et dans le cas déterministe.
- Nous nous proposons d'étudier un modèle SIRS avec le même taux d'incidence aussi bien dans le cas déterministe que dans le cas stochastique en ajoutant au **taux de contact un bruit blanc**, et ceci dans une population dynamique.

Le système (1) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} dS_t = \left[b - \mu S_t - \frac{\beta S_t I_t^2}{1 + a I_t^2} + \gamma R_t \right] dt - \sigma \frac{S_t I_t^2}{1 + a I_t^2} dB_t \\ dI_t = \left[-(\mu + c + \alpha) I_t + \frac{\beta S_t I_t^2}{1 + a I_t^2} \right] dt + \sigma \frac{S_t I_t^2}{1 + a I_t^2} dB_t \\ dR_t = -[(\mu + \gamma) R_t + \alpha I_t] dt \end{array} \right.$$

- Dans le cas déterministe, nous discutons de l'existence d'états d'équilibre endémiques et la stabilité asymptotique globale de l'état d'équilibre libre;

- Dans le cas déterministe, nous discutons de l'existence d'états d'équilibre endémiques et la stabilité asymptotique globale de l'état d'équilibre libre;
- Dans le cas stochastique, nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution globale du système, et la stabilité n-exponentielle de l'état d'équilibre libre;

Résultats préliminaires

Définition 2.1

On considère le système dynamique suivant: $\dot{x} = f(x_t)$, où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

On dit qu'un point $x_e \in \mathbb{R}^n$ est un **état d'équilibre** de ce système si $f(x_e) = 0$

Définition 2.2

Un état d'équilibre x_e du système est dit **globalement asymptotiquement stable (G.A.S)** dans un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^n si pour tout $x_0 \in \mathcal{D}$, on a $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_t - x_e| = 0$

Résultats préliminaires

Définition 2.3

Un état d'équilibre x_e du système est dit **localement asymptotiquement stable (L.A.S)** s'il existe

$r > 0$ tel que $|x_0 - x_e| \leq r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |x_t - x_e| = 0$

Définition 2.4

Un état d'équilibre x_e du système est dit **exponentiellement stable (E.S)** s'il existe des constantes positives C_1, C_2

et r telles que: $|x_0 - x_e| \leq r \Rightarrow |x_t - x_e| \leq C_1 |x_0 - x_e| e^{-C_2 t}$
pour tout $t \geq 0$

Théorème 2.1 (Stabilité au sens de Lyapunov)

S'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continument dérivable, telle que:

- $V(x_e) = 0$,
- $V(x) > 0 \forall x \neq x_e$,
- $f^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}(x) < 0 \forall x \neq x_e$
- $f^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}(x) \rightarrow \infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$

alors l'état d'équilibre x_e est globalement asymptotiquement stable.

Théorème 2.2 (Stabilité locale)

Si toutes les parties réelles des valeurs propres de la matrice jacobienne au point d'équilibre x_e sont négatives, alors x_e est localement asymptotiquement stable.

Recherche des états d'équilibre

Le système (1) admet un seul état d'équilibre libre donné par:

D.F.E

$$E^0 = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0 \right)$$

Les composantes d'un éventuel état d'équilibre endémique

$E^* = (S^*, I^*, R^*)$ vérifient:

D.E.E

$$R^* = \frac{\alpha}{\mu + \gamma} I^*;$$
$$S^* = \frac{(\mu + c + \alpha) (1 + aI^{*2})}{\beta I^*}$$

où I^* est une solution positive de l'équation:

D.E.E

$$AI^2 - BI + C = 0$$

Avec,

$$A = \mu a(\mu + c + \gamma)(\mu + \gamma) + \beta(\mu + c + \alpha)(\mu + \gamma) - \beta\gamma\alpha$$

$$B = b\beta(\mu + \gamma)$$

$$C = \mu(\mu + c + \alpha)(\mu + \gamma)$$

- Si $B^2 < 4AC$ alors le système n'admet pas d'état d'équilibre endémique;
- Si $B^2 = 4AC$ alors le système admet un seul état d'équilibre donné par:

D.E.E

$$I^* = \frac{2\mu(\mu + c + \alpha)}{\beta b}$$

$$S^* = \frac{b^2\beta^2 + 4a\mu^2(\mu + c + \alpha)^2}{2b\mu\beta^2}$$

$$R^* = \frac{2\mu\alpha(\mu + c + \alpha)}{\beta b(\mu + \gamma)}$$

- Si $B^2 > 4AC$ alors le système admet deux états d'équilibre endémiques avec la composante I

D.E.E

$$I_1^* = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$I_2^* = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Etude de la stabilité de l'état d'équilibre libre

Nous allons maintenant étudier la stabilité de l'état d'équilibre libre:

Théorème 3.1 (Stabilité locale)

L'état d'équilibre libre est localement asymptotiquement stable.

Proof.

La matrice jacobienne du système (1) au point $\left(\frac{b}{\mu}, 0, 0\right)$ est:

$$J_{DFE} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & \gamma \\ 0 & -(\mu + c + \alpha) & 0 \\ 0 & \alpha & -(\mu + \gamma) \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont $-\mu$, $-(\mu + c + \alpha)$ et $-(\mu + \gamma)$, toutes des nombres réels négatifs. □

Stabilité asymptotique globale

Considérons le domaine de \mathbb{R}_+^3 suivant:

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^3; x_1 + x_2 + x_3 < \frac{b}{\mu} \right\}$$

Lemme 3.1

Si $(S_0, I_0, R_0) \in \Delta$, alors le système (1) admet une unique solution (S_t, I_t, R_t) telle que $(S_t, I_t, R_t) \in \Delta$ pour tout $t \geq 0$.

Posons

$$\mathcal{R}_0^* := \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu}\right)^2}{\mu + \mathbf{c} + \alpha}.$$

Théorème 3.2 (Stabilité Asymptotique Globale)

Si $\mathcal{R}_0^* < 1$ alors l'état d'équilibre libre $\left(\frac{b}{\mu}, 0, 0\right)$ est globalement asymptotiquement stable dans Δ .

Preuve du théorème 3.2

Posons $\tilde{S}_t = (\frac{b}{\mu} - S_t)$, alors le système (1) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{S}_t}{dt} = -\mu\tilde{S}_t + \frac{\beta(\frac{b}{\mu} - \tilde{S}_t)I_t^2}{1 + aI_t^2} - \gamma R_t \\ \frac{dI_t}{dt} = -(\mu + c + \alpha)I_t + \frac{\beta(\frac{b}{\mu} - \tilde{S}_t)I_t^2}{1 + aI_t^2} \\ \frac{dR_t}{dt} = -(\mu + \gamma)R_t + \alpha I_t \end{array} \right. \quad (2)$$

Considérons maintenant la fonction

$$V(t) = \omega_1 \tilde{S}_t^2 + \frac{1}{2} I_t^2 + \omega_3 R_t^2$$

Preuve du théorème 3.2

Alors,

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(t)}{dt} &:= \frac{\partial V}{\partial \tilde{S}_t} \frac{d\tilde{S}_t}{dt} + \frac{\partial V}{\partial I_t} \frac{dI_t}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R_t} \frac{dR_t}{dt} \\
 &= -2\omega_1 \mu \tilde{S}_t^2 - (\mu + c + \alpha) I_t^2 - 2\omega_1 \gamma \tilde{S}_t R_t \\
 &\quad - 2\omega_3 (\mu + \gamma) R_t^2 + 2\omega_3 \alpha R_t I_t \\
 &\quad + 2\beta \omega_1 \left(\frac{\frac{b}{\mu} - \tilde{S}_t}{1 + a I_t^2} \right) \tilde{S}_t I_t^2 + \beta \left(\frac{\frac{b}{\mu} - \tilde{S}_t}{1 + a I_t^2} \right) I_t^3
 \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.1, $\frac{\frac{b}{\mu} - \tilde{S}_t}{1 + a I_t^2} \leq \frac{b}{\mu}$ et $I_t \leq \frac{b}{\mu}$

Preuve du théorème 3.2

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} \leq & -2\omega_1\mu\tilde{S}_t^2 - (\mu + c + \alpha)I_t^2 - 2\omega_3(\mu + \gamma)R_t^2 \\ & + \beta\left(\frac{b}{\mu}\right)^2 I_t^2 + 2\omega_1\beta\left(\frac{b}{\mu}\right)^2 \tilde{S}_t I_t + 2\omega_3\alpha R_t I_t \end{aligned}$$

Enfin par l'inégalité de Young,

$$\tilde{S}_t I_t \leq \frac{I_t^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\tilde{S}_t^2 \text{ et } R_t I_t \leq \frac{I_t^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}R_t^2 \text{ où } \varepsilon > 0$$

Preuve du théorème 3.2

Finalement on a:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} \leq & - \left[2\omega_1\mu - \omega_1\beta \left(\frac{b}{\mu}\right)^2 \varepsilon \right] \tilde{S}_t^2 \\ & - \left[(\mu + c + \alpha) - \beta \left(\frac{b}{\mu}\right)^2 - \left(\omega_1\beta \left(\frac{b}{\mu}\right)^2 + \omega_3\alpha \right) \frac{1}{\varepsilon} \right] I_t^2 \\ & - [2\omega_3(\mu + \gamma) - \omega_3\alpha\varepsilon] R_t^2 \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de choisir ε suffisamment petit puis, ω_1 et ω_3 aussi suffisamment petits de sorte qu'en utilisant l'hypothèse $\mathcal{R}_0^* < 1$ on ait, $\frac{dV(t)}{dt} \leq 0$. D'après le théorème 2.1, V est une fonction de Lyapunov pour le système (2).

Etude du modèle SIRS avec perturbation aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet avec $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ une filtration satisfaisant les conditions habituelles.

- On perturbe le taux de contact β en lui ajoutant un bruit blanc $\frac{dB}{dt}$;

Etude du modèle SIRS avec perturbation aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet avec $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ une filtration satisfaisant les conditions habituelles.

- On perturbe le taux de contact β en lui ajoutant un bruit blanc $\frac{dB}{dt}$;
- On obtient le système stochastique suivant:

Modèle stochastique

$$\begin{cases} dS_t = \left[b - \mu S_t - \frac{\beta S_t I_t^2}{1 + a I_t^2} + \gamma R_t \right] dt - \sigma \frac{S_t I_t^2}{1 + a I_t^2} dB_t \\ dI_t = \left[-(\mu + c + \alpha) I_t + \frac{\beta S_t I_t^2}{1 + a I_t^2} \right] dt + \sigma \frac{S_t I_t^2}{1 + a I_t^2} dB_t \\ dR_t = -[(\mu + \gamma) R_t + \alpha I_t] dt \end{cases} \quad (3)$$

Analyse de la solution globale du système

Théorème 4.1

Si $(S_0, I_0, R_0) \in \Delta$ alors le système (3) admet une seule solution telle que

$$\mathbb{P}((S_t, I_t, R_t) \in \Delta) = 1 \quad \forall t \geq 0 \quad (4)$$

Preuve du théorème 4.1

On note $N_t = S_t + I_t + R_t$ la population totale.

- Montrons que si $(S_s, I_s, R_s) \in \mathbb{R}_+^3$ pour tous $s \in [0; t]$, alors $N_s < \frac{b}{\mu}$ P.p.s

En sommant toutes les équations du système (3), la population totale vérifie:

$$dN_s = (b - \mu N_s - cI_s)ds \leq (b - \mu N_s)ds \quad P.p.s$$

Par le lemme de Gronwall, on obtient:

$$N_s \leq \frac{b}{\mu} + \left(N_0 - \frac{b}{\mu} \right) e^{-\mu s} \quad P.p.s.$$

Et comme par hypothèse $(S_0, I_0, R_0) \in \Delta$, on a $N_s < \frac{b}{\mu}$ P.p.s.

Preuve du théorème 4.1

- Les coefficients de (3) sont localement Lipschitziens, donc il admet une solution unique (S_s, I_s, R_s) sur tout intervalle fixé $[0; t]$. Notons (S_t, I_t, R_t) la solution de (3) sur $[0; \tau_e[$ et montrons que cette solution est globale c'est à dire $\tau_e = \infty$ *P.p.s*

Soit $\epsilon_0 > 0$ tel que $S_0, I_0, R_0 > \epsilon_0$.

Pour $\epsilon \leq \epsilon_0$, considérons le temps d'arrêt suivant:

$$\tau_\epsilon = \inf \{ t \in [0, \tau_e[, S_t \leq \epsilon \text{ ou } I_t \leq \epsilon \text{ ou } R_t \leq \epsilon \}$$

et posons

$$\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tau_\epsilon = \inf \{ t \in [0, \tau_e[, S_t \leq 0 \text{ ou } I_t \leq 0 \text{ ou } R_t \leq 0 \}$$

Preuve du théorème 4.1

Considérons la fonction suivante:

$$V(X(t)) = -\ln\left(\frac{\mu S_t}{b}\right) - \ln\left(\frac{\mu I_t}{b}\right) - \ln\left(\frac{\mu R_t}{b}\right)$$

Pour $t \geq 0$ fixé et $s \in [0, t \wedge \tau_\epsilon]$, la formule d'Itô nous conduit à:

Preuve du théorème 4.1

$$\begin{aligned}
 dV(X(s)) &= \left[\frac{-b}{S} + \mu + \frac{\beta I^2}{1 + aI^2} - \frac{\gamma R}{S} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 I^4}{(1 + aI^2)^2} \right] ds \\
 &+ \left[(\mu + c + \alpha) - \frac{\beta SI}{1 + aI^2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S^2 I^2}{(1 + aI^2)^2} \right] ds \\
 &+ \left[(\mu + \gamma) - \frac{\alpha I}{R} \right] ds + \left[\frac{\sigma I^2 - \sigma SI}{1 + aI^2} \right] dB \\
 &\leq \left[3\mu + c + \alpha + \gamma + \frac{\beta I^2}{1 + aI^2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 I^4 + \sigma^2 I^2 S^2}{(1 + aI^2)^2} \right] ds \\
 &+ \left[\frac{\sigma I^2 - \sigma SI}{1 + aI^2} \right] dB
 \end{aligned}$$

Preuve du théorème 4.1

En utilisant (4) nous obtenons

$$dV(X(s)) \leq kds + \left(\frac{\sigma I^2 - \sigma SI}{1 + aI^2} \right) dB \text{ P.p.s}$$

avec

$$k = 3\mu + c + \alpha + \gamma + \frac{\beta}{a} + \sigma^2 \left(\frac{b}{\mu} \right)^4$$

Ensuite par intégration on a:

$$V(X(s)) - V(X(0)) \leq ks + \int_0^s \left(\frac{\sigma I_u^2 - \sigma S_u I_u}{1 + aI_u^2} \right) dB_u \text{ P.p.s} \quad (5)$$

pour tout $s \in [0, t \wedge \tau_\epsilon]$

Preuve du théorème 4.1

En appliquant (5) au point $t \wedge \tau_\epsilon$ et en passant à l'espérance, on obtient:

$$\mathbb{E}[V(X(t \wedge \tau_\epsilon))] \leq V(X(0)) + \mathbb{E}[k(t \wedge \tau_\epsilon)] \leq kt + V(X(0)) \quad (6)$$

Par ailleurs d'après (4) on a $V(X(t \wedge \tau_\epsilon)) \geq 0$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(X(t \wedge \tau_\epsilon))] &= \mathbb{E}[V(X(t \wedge \tau_\epsilon))\chi_{\{\tau_\epsilon \leq t\}}] + \mathbb{E}[V(X(t \wedge \tau_\epsilon))\chi_{\{\tau_\epsilon > t\}}] \\ &\geq \mathbb{E}[V(X(\tau_\epsilon))\chi_{\{\tau_\epsilon \leq t\}}]. \end{aligned}$$

Par continuité, il existe au moins une des composantes de $X(\tau_\epsilon)$ égale à ϵ . Par conséquent, $V(X(\tau_\epsilon)) \geq -\ln\left(\frac{\mu\epsilon}{b}\right)$

Preuve du théorème 4.1

D'où,

$$\mathbb{E}[V(X(t \wedge \tau_\epsilon))] \geq -\ln\left(\frac{\mu\epsilon}{b}\right) \mathbb{P}(\tau_\epsilon \leq t). \quad (7)$$

En combinant (6) et (7) on obtient:

$$\mathbb{P}(\tau_\epsilon \leq t) \leq -\frac{kt + V(X(0))}{\ln\left(\frac{\mu\epsilon}{b}\right)}$$

En faisant tendre ϵ vers 0 on obtient $\mathbb{P}(\tau \leq t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Ce qui veut dire que $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 1$. Et comme $\tau_\epsilon \geq \tau$ on conclut que $\tau_\epsilon = \tau = \infty$ P.p.s

Stabilité exponentielle

Définition 4.1

On considère le système stochastique suivant

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t) \quad (8)$$

X_0 est l'état initial et on suppose que $f(t, 0) = g(t, 0) = 0$ for all $t \geq 0$

Un état d'équilibre X_e de ce système est dit

n-exponentiellement stable, s'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^m$ on ait:

$$\mathbb{E} (| X(t, X_0) - X_e |^n) \leq C_1 | X_0 - X_e |^n e^{-C_2 t} \text{ pour tout } t \geq 0$$

Stabilité exponentielle

Par une translation, on ramènera toujours l'équilibre à 0

On associe à (8) l'opérateur différentiel L suivant:

$$LV = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + f^T \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[g^T \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} g \right]$$

où $V(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$

Le théorème suivant donne des critères de stabilité exponentielle.

Stabilité exponentielle

Théorème 4.1 (Afanas'ev et Kolmanowskii, 1996)

S'il existe une fonction $V(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ et des constantes positives K_1 , K_2 et K_3 satisfaisant aux conditions suivantes:

$$K_1 |x|^n \leq V(t, x) \leq K_2 |x|^n \quad (9)$$

$$LV(t, x) \leq -K_3 |x|^n, K_i > 0, n > 0 \quad (10)$$

alors l'état d'équilibre 0 est n -exponentiellement stable.

Stabilité exponentielle

Lemme 4.1

Si $n \geq 2$ et $\epsilon, x, y > 0$, alors

$$x^{n-1}y \leq \frac{(n-1)\epsilon}{n}x^n + \frac{1}{n\epsilon^{n-1}}y^n$$

$$x^{n-2}y^2 \leq \frac{(n-2)\epsilon}{n}x^n + \frac{2}{n\epsilon^{\frac{n-2}{2}}}y^n$$

Stabilité exponentielle

Théorème 4.2

Si $n \geq 2$, $\mathcal{R}_0^* < 1$ et que la condition

$$\sigma^2 < 2 \left(\frac{\mu}{b}\right)^4 \frac{(\mu + c + \alpha)(1 - \mathcal{R}_0^*)}{n - 1} \quad (11)$$

est satisfaite, alors l'état d'équilibre libre $(\frac{b}{\mu}, 0, 0)$ de (8) est n -exponentiellement stable dans Δ .

Preuve du théorème 4.2

On suppose que $(S_0, I_0, R_0) \in \Delta$.

Posons $\tilde{S}_t = (\frac{b}{\mu} - S_t)$, alors le système (3) peut s'écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\tilde{S}_t = \left[-\mu\tilde{S}_t + \frac{\beta(\frac{b}{\mu} - \tilde{S}_t)I_t^2}{1+aI_t^2} - \gamma R_t \right] dt + \frac{\sigma(\frac{b}{\mu} - \tilde{S}_t)I_t^2}{1+aI_t^2} dB_t \\ dI_t = \left[-(\mu + c + \alpha)I_t + \frac{\beta(\frac{b}{\mu} - \tilde{S}_t)I_t^2}{1+aI_t^2} \right] dt + \frac{\sigma(\frac{b}{\mu} - \tilde{S}_t)I_t^2}{1+aI_t^2} dB_t \\ dR_t = -[(\mu + \gamma)R_t - \alpha I_t] dt \end{array} \right.$$

Considérons la fonction suivante:

$$V(\tilde{S}, I, R) = \left(\frac{\mu}{b}\right)^2 \lambda_1 \tilde{S}^n + \frac{1}{n} \left(\frac{\mu}{b}\right)^2 I^n + \lambda_3 R^n$$

Preuve du théorème 4.2

Regardons la condition (10).

$$\begin{aligned}
 LV &= -n\lambda_1\mu \left(\frac{\mu}{b}\right)^2 \tilde{S}^n + \beta n\lambda_1 \left(\frac{\mu}{b}\right)^2 \left(\frac{\frac{b}{\mu} - \tilde{S}}{1 + aI^2}\right) I^2 \tilde{S}^{n-1} \\
 &\quad - n\lambda_1\gamma \left(\frac{\mu}{b}\right)^2 R\tilde{S}^{n-1} - (\mu + c + \alpha) \left(\frac{\mu}{b}\right)^2 I^n \\
 &\quad + \beta \left(\frac{\mu}{b}\right)^2 \left(\frac{\frac{b}{\mu} - \tilde{S}}{1 + aI^2}\right) I^{n+1} - n\lambda_3(\mu + \gamma)R^n + n\lambda_3\alpha I R^{n-1} \\
 &\quad + \frac{1}{2}n(n-1) \left(\frac{\mu}{b}\right)^2 \lambda_1\sigma^2 \left(\frac{\frac{b}{\mu} - \tilde{S}}{1 + aI^2}\right)^2 I^4 \tilde{S}^{n-2} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(n-1) \left(\frac{\mu}{b}\right)^2 \sigma^2 \left(\frac{\frac{b}{\mu} - \tilde{S}}{1 + aI^2}\right)^2 I^{n+2}
 \end{aligned}$$

Preuve du théorème 4.2

En vertu de (4), on a: $\frac{S}{1+aI^2} < \frac{b}{\mu}$ et $I \leq \frac{b}{\mu}$. Donc,

$$\begin{aligned}
 LV &\leq -n\lambda_1\mu \left(\frac{\mu}{b}\right)^2 \tilde{S}^n + n\lambda_1\beta I \tilde{S}^{n-1} - (\mu + c + \alpha) \left(\frac{\mu}{b}\right)^2 I^n \\
 &\quad + \beta I^n - n\lambda_3(\mu + \gamma)R^n + n\lambda_3\alpha I R^{n-1} \\
 &\quad + \frac{1}{2}n(n-1)\lambda_1\sigma^2 \left(\frac{b}{\mu}\right)^2 I^2 \tilde{S}^{n-2} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(n-1)\sigma^2 \left(\frac{b}{\mu}\right)^2 I^n
 \end{aligned} \tag{12}$$

D'après le lemme 4.1 on a les inégalités suivantes:

Preuve du théorème 4.2

$$I\tilde{S}^{n-1} \leq \frac{n-1}{n}\epsilon\tilde{S}^n + \frac{1}{n}\epsilon^{1-n}I^n$$

$$IR^{n-1} \leq \frac{n-1}{n}\epsilon R^n + \frac{1}{n}\epsilon^{1-n}I^n$$

$$I^2\tilde{S}^{n-2} \leq \frac{n-2}{n}\epsilon\tilde{S}^n + \frac{2}{n}\epsilon^{\frac{2-n}{2}}I^n$$

Preuve du théorème 4.2

En faisant intervenir ces inégalités dans (12), on obtient:

$$LV \leq -\Gamma_1 \tilde{S}^n - \Gamma_2 I^n - \Gamma_3 R^n$$

avec,

$$\Gamma_1 = \lambda_1 \left[n\mu \left(\frac{\mu}{b} \right)^2 - \epsilon \left(\beta(n-1) + \frac{1}{2}\sigma^2(n-1)(n-2) \left(\frac{b}{\mu} \right)^2 \right) \right]$$

$$\Gamma_2 = \left[(\mu + c + \alpha) \left(\frac{\mu}{b} \right)^2 - \beta - \frac{1}{2}(n-1)\sigma^2 \left(\frac{b}{\mu} \right)^2 \right]$$

$$- \left[\lambda_1 \left(\beta\epsilon^{1-n} + (n-1)\sigma^2 \left(\frac{b}{\mu} \right)^2 \epsilon^{\frac{2-n}{2}} \right) + \lambda_3 \alpha \epsilon^{1-n} \right]$$

$$\Gamma_3 = \lambda_3 [n(\mu + \gamma) - \alpha(n-1)\epsilon]$$

Preuve du théorème 4.2

Il est facile de voir que le 1^{er} *terme* de Γ_2 peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2}(n-1) \left(\frac{b}{\mu}\right)^2 \left[\frac{2(\mu + c + \alpha) \left(\frac{\mu}{b}\right)^4 (1 - \mathfrak{R}_0^*)}{n-1} - \sigma^2 \right]$$

de sorte que par la condition (11) et le fait que $\mathfrak{R}_0^* < 1$ le rendent strictement positif.

Par suite, il suffit de choisir ϵ suffisamment petit pour que Γ_1 et Γ_3 soient positifs, puis λ_1 et λ_3 aussi petits pour que Γ_2 soit aussi positif.

Enfin, si on pose $K_3 = \min\{\Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3\}$ on retrouve la condition (10) du théorème 4.1.

Définition 4.2

Un point d'équilibre X_e est dit presque sûrement exponentiellement stable si pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^m$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |X(t, X_0)| < 0 \text{ a.s.};$$

Théorème 4.3

Si $\mathcal{R}_0^* < 1$ et $(S_0, I_0, R_0) \in \Delta$ alors

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I_t}{t} < 0$$

et

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln R_t}{t} < 0$$

Preuve du théorème 4.3

Soit $\theta > 0$. Par la formule d'Itô on a:

$$\begin{aligned}
 d \ln [I_t + \theta R_t] &= \frac{1}{I + \theta R} \left[-(\mu + c + \alpha)I + \frac{\beta S I^2}{1 + a I^2} \right] dt \\
 &\quad + \frac{\theta}{I + \theta R} [-(\mu + \gamma)R + \alpha I] dt \\
 &\quad - \frac{1}{2(I + \theta R)^2} \left(\sigma \frac{S I^2}{1 + a I^2} \right)^2 dt \\
 &\quad + \frac{\sigma S I^2}{(I + \theta R)(1 + a I^2)} dB \\
 &\leq \frac{1}{I + \theta R} [-(\mu + c + \alpha)I - (\mu + \gamma)\theta R + \alpha \theta I] dt \\
 &\quad + \frac{1}{I + \theta R} \left[\frac{\beta S I^2}{1 + a I^2} \right] dt + \frac{\sigma S I^2}{(I + \theta R)(1 + a I^2)} dB
 \end{aligned}$$

Convergence exponentielle presque sûre

Preuve du théorème 4.3

Comme $(S_0, I_0, R_0) \in \Delta$, on a:

$$d \ln [I_t + \theta R_t] \leq \frac{1}{I + \theta R} \left[- \left((\mu + c + \alpha) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right)^2 - \theta \alpha \right) I \right] dt \\ + \frac{1}{I + \theta R} [-(\mu + \gamma) \theta R] dt + \frac{\sigma S I^2}{(I + \theta R)(1 + a I^2)} dB.$$

Puisque $\mathfrak{R}_0^* = \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)^2}{\mu + c + \alpha} < 1$, on peut choisir θ tel que

$$\theta \alpha < (\mu + c + \alpha) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right)^2.$$

Posons ensuite $\bar{\theta} = \min \left\{ (\mu + c + \alpha) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right)^2 - \theta \alpha; \mu + \gamma \right\}$

Convergence exponentielle presque sûre

Preuve du théorème 4.3

Par conséquent,

$$\begin{aligned} d \ln [I_t + \theta R_t] &\leq \frac{1}{I + \theta R} [-\bar{\theta}I - \bar{\theta}\theta R] dt + \frac{\sigma S I^2}{(I + \theta R)(1 + aI^2)} dB \\ &\leq -\bar{\theta} dt + \frac{\sigma S I^2}{(I + \theta R)(1 + aI^2)} dB \end{aligned}$$

Ce qui donne encore,

$$\ln [I_t + \theta R_t] \leq \ln [I_0 + \theta R_0] - \bar{\theta}t + M_t \quad (13)$$

où

$$M_t = \int_0^t \frac{\sigma S(u) I^2(u)}{(I(u) + \theta R(u))(1 + aI^2(u))} dB_u$$

Convergence exponentielle presque sûre

Preuve du théorème 4.3

$(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale à variation quadratique bornée, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_t}{t} = 0$ P.p.s.

Ensuite si on divise (13) par t et qu'on fait tendre t vers ∞ on obtient:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln [I_t + \theta R_t] \leq -\bar{\theta} < 0$$

Puisque $\bar{\theta} > 0$, $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I_t}{t} < 0$ et $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln R_t}{t} < 0$.

Conclusion et perspectives

Au terme de cette étude, nous pouvons dire que la stabilité de l'état d'équilibre libre dépend de la position du paramètre \mathcal{R}_0^* par rapport à 1. Pour la version stochastique du modèle, l'intensité du bruit σ permet de contrôler la vitesse de convergence de la solution vers l'état d'équilibre libre. En effet, si σ^2 ne dépasse pas un certain seuil σ_0 (dépendant de n) alors on a la stabilité n -exponentielle.

Toutefois, certains défis restent à relever dans ce travail.

- L'étude de la stabilité des éventuels états d'équilibre endémiques;

Conclusion et perspectives

Au terme de cette étude, nous pouvons dire que la stabilité de l'état d'équilibre libre dépend de la position du paramètre \mathcal{R}_0^* par rapport à 1. Pour la version stochastique du modèle, l'intensité du bruit σ permet de contrôler la vitesse de convergence de la solution vers l'état d'équilibre libre. En effet, si σ^2 ne dépasse pas un certain seuil σ_0 (dépendant de n) alors on a la stabilité n -exponentielle.

Toutefois, certains défis restent à relever dans ce travail.

- L'étude de la stabilité des éventuels états d'équilibre endémiques;
- Que se passerait-il si $\mathcal{R}_0^* \geq 1$?