Analyse harmonique dyadique : une introduction

Aline Bonami
Université d'Orléans

Abidjan, mars 2014

Fonction maximale dans $\mathbb{R}^d$ et convergence presque partout

$$Mf(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy$$

supremum pris sur tous les cubes contenant x.
On aurait pu prendre les boules, même fonction à des constantes près.

Application fondamentale : **Théorème de différentiation de Lebesgue**

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy.$$

Ici $B(x,r)$ désigne la boule de centre x et de rayon r et f est localement intégrable.

Théorème maximal

Théorème

(théorème maximal) [Hardy–Littlewood–Wiener]
M est de type faible $(1,1)$:

$$|\{Mf > \lambda\}| \leq \frac{c\|f\|_{L^1}}{\lambda}.$$

De plus M est de type fort (p,p), $1 < p < \infty$:

$$\|Mf\|_{L^p} \leq \frac{cp}{p-1}\|f\|_{L^p}. \tag{1}$$

Ici $|A|$ est la mesure de Lebesgue de A.
c dépend de la dimension. Meilleure constante ?
http ://terrytao.wordpress.com/2011/05/21/steins-spherical-maximal-theorem/

Deux outils indispensables

Exercice

Montrer que, quelle que soit la fonction ϕ positive sur l'espace mesuré (X,μ), on a la formule

$$\int_X \phi^p \, d\mu = p \int_0^\infty t^p \mu(\{x \in X : \phi(x) > t\}) \, \frac{dt}{t}.$$

Exercice

Montrer que l'inégalité faible $(1,1)$ entraîne l'inégalité forte. Indication : on pourra écrire $f = g + h$ avec $g = f \mathbb{1}_{|f|>\lambda/2}$ et en déduire que

$$\{Mf > \lambda\} \subset \{Mg > \lambda/2\}.$$

Le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz

Si T est un opérateur (linéaire, sous-linéaire) qui est de type faible (p_0, q_0) et de type faible (p_1, q_1), avec $1 \leq p_0 \leq q_0 \leq \infty$ et $1 \leq p_1 \leq q_1 \leq \infty$, alors T est de type fort (p, q) pour tout $p \in (p_0, p_1)$ si p et q sont tels que

$$\frac{1}{p} = \frac{t}{p_0} + \frac{1-t}{p_1} \qquad \frac{1}{q} = \frac{t}{q_0} + \frac{1-t}{q_1}.$$

Hypothèses : $\mu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{c_0 \|f\|_{p_0}^{q_0}}{\lambda^{q_0}}$

$$\mu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{c_1 \|f\|_{p_1}^{q_1}}{\lambda^{q_1}}$$

Conclusion : $\|f\|_q \leq c\|f\|_p$.

Le théorème de différentiation de Lebesgue

On admet pour l'instant le théorème maximal.

A montrer, pour f localement intégrable dans $\mathbb{R}^d$: il existe L_f (**ensemble de Lebesgue**) de complémentaire négligeable

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy \qquad x \in L_f \tag{2}$$

Nous allons montrer un résultat plus fort, l'existence de L_f tel que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0 \qquad x \notin L_f. \tag{3}$$

Il suffit de le montrer pour f intégrable.

Le théorème de différentiation de Lebesgue - Suite

$$A_\lambda = \{x : \limsup_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy > \lambda\} \qquad \lambda \geq 0.$$

On veut montrer que $|A_0| = 0$. Comme $A_0 = \cup_j A_{1/j}$ il suffit de montrer que $|A_\lambda| = 0$ pour tout $\lambda > 0$.

Vrai si f est continue. Le sous-espace des fonctions continues est dense dans L^1.
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$: $f = g + h$ avec g continue, $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$ Dans A_λ :

$$\begin{aligned} \lambda &< \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |h(y) - h(x)|\, dy \\ &\leq |h(x)| + \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |h(y)|\, dy \\ &\leq |h(x)| + \kappa_d Mh(x). \end{aligned}$$

Le théorème de différentiation de Lebesgue - Suite

Vu : sur A_λ on a l'inégalité

$$\kappa_d Mh + |h| > \lambda.$$

$$|A_\lambda| \leq |\{x \in \mathbb{R}^d : c_d Mh(x) > \lambda/2\}| + |\{x \in \mathbb{R}^d : |h(x)| > \lambda/2\}|$$

Inégalité maximale pour le premier terme, inégalité de Tchebychev pour le second :

$$|A_\lambda| \leq \frac{2(\kappa_d c + 1)}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\, dx \leq \frac{2(\kappa_d c + 1)}{\lambda} \varepsilon$$

En faisant tendre ε vers 0 on obtient que $|A_\lambda| = 0$.

Cubes dyadiques

Intervalle dyadique dans $\mathbb{R}$: $[2^{-k}n, 2^{-k}(n+1))$, avec $n, k \in \mathbb{Z}$. 2^{-k} est appelé paramètre d'échelle. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des intervalles dyadiques et $\mathcal{D}_k$ le sous ensemble constitué des intervalles $I \in \mathcal{D}_k$ tels que $|I| = 2^{-k}$.

- A l'échelle k les intervalles dyadiques forment une partition de $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{D}$ est invariant par la dilatation $x \mapsto 2x$: si I intervalle dyadique, alors $2I$ aussi.
- Chaque intervalle dyadique I est réunion disjointe de deux intervalles de l'échelle moitié.
- Si I, I' sont deux intervalles dyadiques, alors ou bien l'un est inclus dans l'autre ou bien les deux intervalles sont disjoints.

Lemme. *Soit $\mathcal{L}$ une collection d'intervalles dyadiques I de taille bornée. Si $\mathcal{L}_{max}$ désigne la sous-collection des intervalles dyadiques*

Fonction maximale dyadique

Dans $\mathbb{R}^d$ les cubes dyadiques sont des produits d'intervalles dyadiques de la même longueur. Les propriétés se généralisent.

On définit la fonction maximale dyadique par

$$M^{\mathcal{D}}f(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy$$

où le supremum est pris sur tous les cubes dyadiques Q contenant x.
Il est clair que $M^{\mathcal{D}}f \leq Mf$. Le contraire est presque vrai : Soit $\mathcal{D}_\alpha$, pour $\alpha \in \{0, 1/3\}^d$, la collection des cubes $2^{-k}([0,1)^d + j + (-1)^k \alpha)$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{Z}^d$. La famille $\mathcal{D}_\alpha$ possède toutes les propriétés que nous avons énoncées pour la famille des cubes dyadiques.

Fonction maximale dyadique-Suite

Rappel : les cubes de $\mathcal{D}_\alpha$, pour $\alpha \in \{0, 1/3\}^d$, sont donnés par $2^{-k}([0,1)^d + j + (-1)^k\alpha)$.

Lemme

Tout cube Q d'arête ℓ est inclus dans un cube Q' d'échelle k appartenant à une des familles $\mathcal{D}_\alpha$ et tel que $2^k \leq 6\ell$.

Preuve en dimension 1. Soit k tel que $2^{-k-1} \leq 3\ell < 2^{-k}$. Si I ne contient aucun point $2^{-k}j$, alors I est contenu dans un cube dyadique classique de taille $2^{-k} < 6\ell$. Si I contient $2^{-k}j$. Alors il ne contient aucun point de la forme $2^{-k}(j \pm 1/3)$. Il est donc contenu dans un intervalle de la seconde famille.

Conclusion : il suffit de travailler sur la fonction maximale dyadique.

Théorème maximal dyadique

Inégalité de Doob

$$\lambda|\{M^{\mathcal{D}}f > \lambda\}| \leq \int_{M^{\mathcal{D}}f>\lambda} |f(x)|dx. \tag{4}$$

Démonstration. Soit $A = \{M^{\mathcal{D}}f > \lambda\}$, réunion des cubes dyadiques Q tels que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx > \lambda.$$

Q de volume borné par $\frac{\int |f(x)|dx}{\lambda}$, donc borné. On peut utiliser le lemme sur les collections de cubes dyadiques :
A est réunion disjointe de cubes dyadiques Q_j qui satisfont la même propriété et donc pour lesquels

$$|Q_j| < \frac{1}{\lambda}\int_{Q_j} |f(x)|dx.$$

On conclut en faisant la somme en j.

Théorème maximal dyadique-Suite

Exercice

Déduire de (4) *que*

$$\int |M^{\mathcal{D}}f|^p dx \leq \frac{p}{p-1}\int |M^{\mathcal{D}}f|^{p-1}|f|dx.$$

En déduire l'inégalité de type fort (p,p) *avec la constante* $\frac{p}{p-1}$.

Démonstration géométrique valable pour une mesure de Radon quelconque. Pour avoir des cubes bornés, on considère d'abord

$$M_N^{\mathcal{D}}f(x) = \sup_{x\in Q, |Q|\leq 2^{dN}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\, dy$$

puis on fait tendre N vers $+\infty$.

Martingales dyadiques et autres

Notations. Si Q est un cube dyadique, $\mathcal{D}(Q)$ (resp. $\mathcal{D}_k(Q)$) est la sous-famille des cubes dyadiques inclus dans Q (resp. des cubes dyadiques de l'échelle 2^{-k}).
En dimension 1, on prend $I_0 = [0, 1)$. On note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les intervalles de $\mathcal{D}_n(I_0)$. Alors $\mathcal{F}_n \nearrow$ et a pour limite la tribu borélienne.

Lemme. *Si I est de la n-ième génération,*

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) = \frac{1}{|I|} \int_I f(x)dx.$$

Démonstration. $\mathbb{E}(g|\mathcal{F}_n)$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable et possède la propriété caractéristique, parmi les fonctions $\mathcal{F}_n$-mesurables, que, quelle que soit la fonction h $\mathcal{F}_n$-mesurable

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(g|\mathcal{F}_n)h) = \mathbb{E}(gh).$$

Fonction maximale pour les martingales

La fonction maximale dyadique (restreinte à l'intervalle I_0) coïncide avec la fonction maximale au sens des martingales :

$$\sup_{x\in I, I\in\mathcal{D}(I_0)} \frac{1}{|I|}\int_I f(y)\,dy = \sup_n |\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)|(x) = f^*(x).$$

(Attention, les deux notions ne coïncident que pour les fonctions positives).

L'inégalité que nous avons démontrée est l'inégalité de Doob pour f positive :

$$\lambda\mathbb{P}(f^* > \lambda) \leq \int_{f^*>\lambda} f.$$

Généralisation. Soit une suite croissante de tribus $\mathcal{F}_n$ sur un espace de probabilité, on dit que la suite (f_n) définit une martingale intégrable si chaque f_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable, si $\mathbb{E}(f_{n+1}|\mathcal{F}_n) = f_n$, et si $\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}|f_n| < \infty$.

Inégalité de Doob

Inégalité de Doob. *Pour une martingale positive intégrable,*

$$\lambda\mathbb{P}(f^* > \lambda) \leq \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{f^*>\lambda} f_n).$$

Démonstration classique : temps d'arrêt $\tau = \inf\{n; f_n > \lambda\}$

$$\mathbb{P}(f^* > \lambda) = \mathbb{P}(\tau < \infty).$$

Par définition $f_\tau = f_n$ lorsque $\tau = n$, donc $f_\tau \geq \lambda$ quand $\tau < \infty$.

Conclusion : $\int_{\tau\leq n} f_\tau = \int_{\tau \leq n} f_n$, ce qui découle de la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle.

La technique de sélection utilisée pour les cubes dyadiques est une technique de temps d'arrêt.

Si une martingale intégrable est donnée par une fonction f intégrable telle que $f_n = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)$ alors f_n converge p. s. vers f. C'est l'analogue du théorème de différentiation de Lebesgue, qu'on

Exercices supplémentaires

Exercice

Montrer que si f est dans L^p, avec $1 < p < \infty$, alors f_n tend vers f dans L^p. (On pourra utiliser le théorème de Lebesgue, le majorant étant donné par la fonction maximale).

Exercice

Montrer que si f est la fonction indicatrice de la boule unité centrée en 0, alors $Mf(x) \geq c|x|^{-n}$ à l'infini. En déduire qu'il n'y a pas d'inégalité forte $(1,1)$. En déduire que la plus petite constante dans l'inégalité

$$\|Mf\|_{L^p} \leq A\|f\|_{L^p} \tag{5}$$

est supérieure à $\frac{c}{p-1}$ (les constantes c peuvent changer d'une ligne à l'autre).

Variables aléatoires de Bernoulli

Une **v.a. de Bernoulli** (centrée) est une v. a. qui prend les valeurs -1 et 1 avec probabilité $1/2$. Plusieurs manières de considérer une suite infinie de v. a. de Bernoulli indépendantes.

- Le groupe $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ est un groupe abélien compact, muni de la mesure produit. Si on considère pour X_j la j-ième fonction coordonnée, alors les X_j sont indépendantes et sont des v. a. de Bernoulli. On ajoute $X_0 = 1$.
- Les **fonctions de Rademacher**, qui sont définies sur $[0, 1)$ (muni de la mesure de Lebesgue) par $r_n(t) = \operatorname{sgn} \sin(2^n \pi t)$, sont orthogonales et sont de Bernoulli. On peut voir qu'elles sont indépendantes. On ajoute $r_0 = 1$.
- Soit une suite (Y_n) de v. a. gaussiennes centrées réduites indépendantes. Alors la suite $X_n = \operatorname{sgn} Y_n$ forme une suite de Bernoulli indépendantes.

Fonctions de Rademacher

Si $t = \sum_{n>0} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$, alors

$$r_n(t) = \left\{ \begin{array}{lr} 1 & \text{si } \varepsilon_n = 0, \\ -1 & \text{si } \varepsilon_n = 1 \end{array} \right. .$$

(On exclut les développements avec uniquement des 1 à partir d'un certain rang).

L'application $t \mapsto (\varepsilon_n)$ envoie $[0,1)$ sur $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$ et fait se correspondre les fonctions coordonnées et les fonctions de Rademacher.

tout énoncé relatif aux martingales dyadiques peut s'interpréter en termes de v. a. de Bernoulli.

La tribu $\mathcal{F}_n$ peut aussi être vue comme la tribu engendrée par $X_0, \cdots, X_n$.

Fonctions de Haar

Pour tout intervalle dyadique I, on note I_- et I_+ les deux intervalles dyadiques moitié qui le composent. Alors

$$h_I(x) = \frac{1}{\sqrt{|I|}} \begin{cases} 1 & x \in I_- \\ -1 & x \in I_+ \\ 0 & x \notin I \end{cases} .$$

Théorème

Les fonctions de Haar $(h_I)_{I \in \mathcal{D}}$ forment une base de $L^2(\mathbb{R})$. Les fonctions de Haar $(h_I)_{I \in \mathcal{D}(I_0)}$, complétées par $\mathbb{1}_{I_0}$, forment une base de $L^2(I_0)$.

La complétion est une conséquence du théorème de différentiation de Lebesgue dyadique.
La base de Haar est la base d'ondelettes la plus simple. Elle est très utilisée en traitement du signal ou de l'image.

Inégalité de Khintchine

Théorème

Soit X_j une suite de v. a. de Bernoulli indépendantes, $X_0 = 1$. Alors, si $\sum a_j^2 < \infty$, la somme $\sum a_j X_j$, qui converge dans L^2 est aussi convergente dans L^p pour tout $p < \infty$ et

$$\mathbb{E}|\sum a_j X_j|^p \leq C p^{p/2} (\sum a_j^2)^{p/2}.$$

Démonstration Suffisant de considérer les sommes finies. Soit Y_j une suite de v. a. gaussiennes centrées réduites ind., $Y_0 = 1$. On prend $X_n = \operatorname{sgn} Y_n = \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par les X_j. Inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles : majoration par $\mathbb{E}|\sum_0 a_j Y_j|^p$, c-à-d du moment d'ordre p d'une gaussienne centrée de variance $\sum_0 a_j^2$, soit

$$(\sum a_j^2)^{p/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^p e^{-t^2/2} dt.$$

Inégalité de Khintchine-Suite

Exercice

Montrer que la limite n'est pas bornée en général. Montrer, pour les sommes infinies, que $\exp \lambda X^2$ *est intégrable si* $\lambda \sum a_j^2 < 1/2$.

Corollaire

Soit X_j *une suite de v. a. de Bernoulli indépendantes,* $X_0 = 1$*. Alors*

$$(\sum a_j^2)^{1/2} \leq c \sup_N \mathbb{E} \left| \sum_0^N a_j X_j \right| .$$

Pour la démonstration il suffit de considérer les sommes finies. On utilise ensuite la log-convexité des moments (conséquence de l'inégalité de Hölder) : $\mathbb{E}Z^2 \leq (\mathbb{E}Z)^{\alpha}(\mathbb{E}Z^4)^{1-\alpha}$
si on choisit α de sorte que $2 = \alpha + 4(1-\alpha)$ donc $\alpha = 2/3$. On utilise ensuite l'inégalité de Khintchine.

Une application de l'inégalité de Khintchine

Théorème

Soit T un opérateur borné sur $L^P(X, d\mu)$, de norme $\|T\|$. Alors l'opérateur s'étend en un opérateur borné sur $L^p(X, \mathbb{C}^N)$ avec une norme indépendante de N c'est-à-dire

$$\|(\sum |Tf_j|^2)^{1/2}\|_p \leq C\|T\|\|(\sum |f_j|^2)^{1/2}\|_p.$$

$$\sum |f_j(x)|^2)^{p/2} \approx \int_0^1 |\sum r_j(t) f_j(x)|^p$$

du fait de l'inégalité de Khintchine (ou son corollaire). Donc

$$\int_X |\sum r_j(t) Tf_j(x)|^p d\mu \leq \|T\|^p \int_X \int_0^1 |\sum r_j(t) f_j(x)|^p d\mu(x).$$

On intègre en t, on change l'ordre des intégrations et on utilise les inégalités de Khintchine pour conclure.

Transformée de Hilbert

Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact,

$$Hf(x) = \mathrm{v.\ p.}\frac{1}{\pi}\int \frac{f(y)}{x-y}dy = \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}dy.$$

$$Hf = \mathrm{v.\ p.}\frac{1}{\pi x} * f.$$

La distribution $\mathrm{v.\ p.}\frac{1}{\pi x}$ a pour transf. Fourier la fonction $-i\,\mathrm{sgn}$.
Donc

$$\widehat{Hf}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}\,\xi\widehat{f}(\xi).$$

$x \times \mathrm{v.\ p.}\frac{1}{\pi x} = \frac{1}{\pi}$ donne par transf. Fourier $\frac{\delta_0}{\pi}$.

Multiplication par $-2\pi i x$, donne dérivation.

Exercice

Montrer que la transformée de Hilbert est un opérateur unitaire sur L^2. Montrer que l'image d'une fonction de $L^1 \cap L^2$ n'est pas dans L^1 si l'intégrale de f n'est pas nulle.

Opérateur de Calderón-Zygmund

K mesurable dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ est un noyau de C.-Z. si

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^d},$$

$$|K(x,y) - K(x',y)| \leq \frac{C|x-x'|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}} \qquad |K(x,y) - K(x,y')| \leq \frac{C|y-y'|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}$$

pour $x \neq y$ et $\max(|x-x'|, |y-y'|) \leq \frac{1}{2}|x-y|$.
Un opérateur est dit **opérateur de Calderón-Zygmund** de noyau K s'il est borné dans L^2 et :

$$\int g(x) T(f)(x)\, dx = \iint g(x) K(x,y) f(y)\, dy\, dx$$

lorsque f et g sont des fonctions régulières dont les supports sont disjoints.

Opérateur de Calderón-Zygmund - Suite

Exercice

Montrer que le noyau de la transformée de Hilbert est de Calderón-Zygmund.

Théorème

Soit T un opérateur de Calderón-Zygmund. Alors T est de type faible $(1,1)$ et de type fort (p,p).

Transformées de martingales

Soit v_n de fonctions $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurables (suite prévisible), v_0 constante.Si $T_v(f) = g$,

$$g_0 = v_0 f_0 \qquad g_n - g_{n-1} = v_n(f_n - f_{n-1}), \qquad n \geq 1.$$

$d_n = f_n - f_{n-1}$ est appelée suite des différences de la martingale

$$\mathbb{E}(d_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

Lemme

L'opérateur T_v est borné dans L^2 si (et seulement si) la suite v_n est bornée.

$$\|f\|_2^2 = \sup \|f_n\|_2^2 = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(d_n^2).$$

$$\mathbb{E}(d_n d_{n+k}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(d_n d_{n+k} | \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(d_n \mathbb{E}(d_{n+k} | \mathcal{F}_n)) = 0.$$

Multiplicateurs de Haar

Si $v_n = \alpha_I$ sur I, alors $T_v(h_I) = \alpha_I h_I$ et

$$T_v(f) = \sum_I \alpha_I \langle f, h_I \rangle h_I + \alpha_0 \mathbb{1}_{I_0}.$$

Théorème

Soit T_v une transformée de martingale, avec $\sup_n |v_n| \leq 1$. Alors T_v est de type faible $(1, 1)$ et de type fort (p, p).

Essentiellement dû à Burkholder. Il suffit de montrer l'inégalité faible (1, 1). Difficultés liées aux sauts de la martingale dans le cas général.

Démonstration dans le cas dyadique

Si ϕ est à support dans I et d'intégrale nulle, alors $T_\alpha(\phi) = \sum_{I' \subset I} \alpha_{I'} \langle \phi, h_I \rangle h_{I'}$ est à support dans I et de norme L^2 majorée par celle de ϕ.

Point-clé : **décomposition de Calderón-Zygmund** de la fonction f, étant donné $\lambda > 0$. Soit

$$\{x; M^{\mathcal{D}} f(x) \geq \lambda\} = \cup I_j$$

réunion disjointe. Par maximalité, $\int_{I_j} w \leq 2\lambda |I_j|$. Donc, $f = g + b$ (ou encore $f = f_\tau + (f - f_\tau)$) avec

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \quad \text{n'appartient à aucun des } I_j \\ \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f(y) dy & \text{si } x \in I_j \end{cases}.$$

Alors $|g| \leq 2\lambda$ et $T_\alpha b$ est à support dans la réunion des I_j, c'est-à-dire dans l'ensemble où $M^{\mathcal{D}} f > \lambda$.

$$|\{T_\alpha f \geq \lambda\}| \leq |\{M^{\mathcal{D}} f \geq \lambda\}| + |\{T_\alpha g \geq \lambda\}| \leq \frac{3}{\lambda} \|f\|_1.$$

Fonction carrée

En utilisant le théorème de Khintchine on en déduit immédiatement que

$$\|(\sum_{n\geq 0} d_n^2))^{1/2}\|_p \leq C_p\|f\|_p \leq \|(\sum_{n\geq 0} d_n^2))^{1/2}\|_p.$$

La quantité $(\sum_{n\geq 0}\mathbb{E}(d_n^2))^{1/2}$ est la **fonction carrée de la martingale**.

Poids de Muckenhoupt

w est un poids de la classe A_p, $1 < p < \infty$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)\, dy \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-\frac{1}{p-1}}\, dy \right)^{p-1} < \infty \tag{6}$$

w est un poids de la classe A_1 s'il existe une constante K telle que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)\, dy \leq K \inf_Q w, \tag{7}$$

$[w]_{A_1}$ la plus petite constante possible.

Exercice

Montrer (inégalité de Jensen) que

$$1 \leq p \leq q \quad \Longrightarrow \quad [w]_{A_q} \leq [w]_{A_p} \quad \textit{i.e.} \quad A_p \subset A_q.$$

Inégalités maximales à poids

$w(Q)$ mesure de Q relative à la mesure à poids wdx
$L^p(w\,dx) = L^p(w)$.

Théorème

[Muckenhoupt (1972), Buckley (1993), Lerner (2008)]
Soit $1 < p < \infty$. $w \in A_p$ est équivalent à :

(c) *M est de type faible (p,p) dans $L^p(w)$. De plus*

$$\lambda^p \int_{Mf>\lambda} w(x)dx \le c_d [w]_{A_p} \|f\|^p_{L^p(w)}. \tag{8}$$

(d) *M est borné sur $L^p(w)$. De plus*

$$\|M\|_{L^p(w)} \le \frac{c_n p}{p-1} [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}. \tag{9}$$

Démonstration $p = 2$

$w \in A_2$ est équivalent à, pour tout f positive

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,dy\right)^2 w(Q) \leq [w]_{A_2}\int_Q f(y)^2\,w(y)dy. \qquad (10)$$

(On teste sur la fonction $f = \mathbb{1}_Q w^{-1}$.)

Si inégalité faible

$$\lambda^2 \int_{Mf>\lambda} w(x)dx \leq c_d[w]_{A_2}^2 \|f\|_{L^2(w)}^2,$$

on a (10).

Conditions suffisantes. Rappel : soit M_w l'opérateur maximal (dyadique) pour la mesure wdx. De même M_σ avec $\sigma = w^{-1}$. Puisque $w \in A_2$, de l'inégalité (10) on déduit que $(M^{\mathcal{D}}f)^2 \leq [w]_{A_2} M_w f^2$. D'où l'inégalité faible.

Démonstration $p = 2$-Suite

Montrons de la même manière que

$$M^{\mathcal{D}} f \leq [w]_{A_2} M_w \left[w^{-1} \Big(M_\sigma(f \sigma^{-1}) \Big) \right].$$

$$I = \frac{1}{|Q|} \int_Q f \leq [w]_{A_2} \frac{|Q|}{w(Q)} \Big(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q f(x) \sigma^{-1}(x) \sigma(x) dx \Big).$$

$$I \leq [w]_{A_2} \frac{|Q|}{w(Q)} \inf_Q M_\sigma(f \sigma^{-1})$$

leq $[w]_{A_2} \frac{1}{w(Q)} \int_Q M_\sigma(f\sigma^{-1}) dx.$
Mais dans le cube Q

$$\frac{1}{w(Q)} \int_Q M_\sigma(f \sigma^{-1}) dx \leq M_w \left[w^{-1} \Big(M_\sigma(f \sigma^{-1}) \Big) \right].$$

Cas des martingales

Suite croissante de tribus $\mathcal{F}_n$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$.
Condition A_2 pour un poids Z :

$$[Z]_{A_2} = \sup_n \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)\mathbb{E}(Z^{-1}|\mathcal{F}_n) < \infty. \tag{11}$$

Proposition

Soit $(f_n = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)$ une martingale positive, f^* sa fonction maximale. Alors

$$\mathbb{E}((f^*)^2 Z) \leq 16[Z]_{A_2}^2 \mathbb{E}((f^2 Z).$$

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(U|\mathcal{F}_n)\mathbb{E}_{\mathbb{U}}(fZ|\mathcal{F}_n)$$

Erratum + exercices

Y_n suite de Gaussiennes centrées réduites indépendantes, $X_n = \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par les X_j. Alors X_n prend les valeurs $\pm\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ avec probabilité $1/2$ (Bernoulli fois une constante !). Attention, modifier l'énoncé de l'exercice

Exercice

Montrer que la limite n'est pas bornée en général. Montrer, pour les sommes infinies, que $\exp \lambda X^2$ *est intégrable si* $\lambda \sum a_j^2 < 1/\sqrt{\pi}$.

Exercice

Montrer que si f *est la fonction indicatrice de la boule unité centrée en* 0, *alors* $Mf(x) \geq c|x|^{-d}$ *en dehors de cette boule. En déduire qu'il n'y a pas d'inégalité forte* $(1,1)$. *En déduire que la plus petite constante dans l'inégalité*

$$\|Mf\|_{L^p} \leq A\|f\|_{L^p} \tag{12}$$

est supérieure à

Méthode d'extrapolation de Rubio de Francia

Luque, Pérez et Rela : le théorème de Buckley est optimal.

Proposition

Soit $p > 1$ donné et soit $\psi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ une fonction croissante telle que, quel que soit le poids $w \in A_p$ et quel que soit la fonction f positive,

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \leq \psi([w]_{A_p})\|f\|_{L^p(w)}.$$

Alors il existe une constante c telle que $\psi(t) \geq ct^{\frac{1}{p-1}}$.

$p = 2$: pour chaque $q > 1$ une fonction f positive de norme 1 dans L^q et telle que $\|Mf\|_q \geq \frac{c}{q-1}$.
On pose

$$R(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{M^k(f)}{\|M\|_q^k}.$$

$$R(f)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{M^k(f)}{\|M\|_q^k}$$

$$f\leq R(f) \qquad \|R(f)\|_{L^q}\leq 2\,\|f\|_{L^q},$$

$$[R(f)]_{A_1}\leq 2\,\|M\|_q.$$

Lemme

$w=(Rf)^{q-2}$ est un poids de A_2.

Il suffit de montrer que $(Rf)^{2-q}$ est un poids de A_1. Mais $M[(Rf)^{2-q}]\leq M(Rf)^{2-q}\leq 2\|M\|_q^{2-q}f^{2-q}$.

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_{L^q} &= \left(\int\left((Mf)(Rf)^{\frac{q}{2}-1}\right)^q(Rf)^{q(1-\frac{q}{2})}dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
\|Mf\|_{L^q} &\leq \left(\int(Mf)^2(Rf)^{q-2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int(Rf)^q dx\right)^{1-\frac{q}{2}}\\
&\leq \psi([w]_{A_2})\left(\int f^2(Rf)^{q-2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int(Rf)^q dx\right)^{1-\frac{q}{2}}.
\end{aligned}$$

Inégalités de Hölder inverses

Pour un poids A_p il existe $r > 1$ tel que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^r\right)^{1/r} \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q w.$$

Ppropriété fondamentale, due à Gehring. Version précisée de Lerner, Ambrosi et Pérez (2008)

Proposition

Soit w un poids sur $\mathbb{R}^d$ tel que $M^{\mathcal{D}}w \leq [w]_{A_1}w$. Alors, si $r = 1 + 1/(2^{d+1}[w]_{A_1})$, on a l'inégalité pour tout cube dyadique

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^r\right)^{1/r} \leq \frac{2[w]_{A_1}}{|Q|}\int_Q w.$$

Démonstration cas $d = 1$. Soit

$$\{M_I^{\mathcal{P}} w > \lambda\} = \cup I_j.$$

Si $\lambda > \frac{1}{|I|} \int_I w dx$, alors

$$\int_{I_j} w \leq 2\lambda |I_j|.$$

Donc

$$\int_{M_I^{\mathcal{P}} w > \lambda} w dx \leq 2 |M_I^{\mathcal{P}} w > \lambda|.$$

On calcule

$$\begin{aligned} \int_I (M_I^{\mathcal{P}} w)^\delta w dx &= \delta \int_0^\infty \lambda^{\delta - 1} \left(\int_{M_I^{\mathcal{P}} > \lambda} w \right) d\lambda \\ &\leq \frac{1}{|I|^\delta} (\int_I w dx)^{\delta + 1} + \frac{2\delta}{\delta + 1} \int_I (M_I^{\mathcal{P}} w)^{\delta + 1} dx. \end{aligned}$$

Avec le choix proposé pour δ on peut faire passer le second terme du membre de droite à gauche et conclure.

Relations avec les processus stationnaires

Suite de v. a. gaussiennes centrées réduites Y_n telles que les covariances $\mathbb{E}(Y_j Y_k) = r(j-k)$.
r définie positive : quelle que soit la suite finie (ξ_j),

$$\sum_{j,k} r(j-k)\xi_j\xi_k \geq 0.$$

Théorème de Bochner (ou de Herglotz) : il existe une probabilité sur $[0, 2\pi]$ telle que

$$\rho(n) = \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t).$$

$$\mathbb{E}(Y_j Y_k) = \int_0^{2\pi} e^{-ijt} e^{ikt} d\mu(t)$$

Projection sur le passé dans l'espace des gaussiennes ? Projection dans $L^2(d\mu)$? Helson-Szegö 1965 $d\mu = wdx$ et $w = exp(u + Hv)$, où u et v sont bornés, $|u| < \pi/2$.